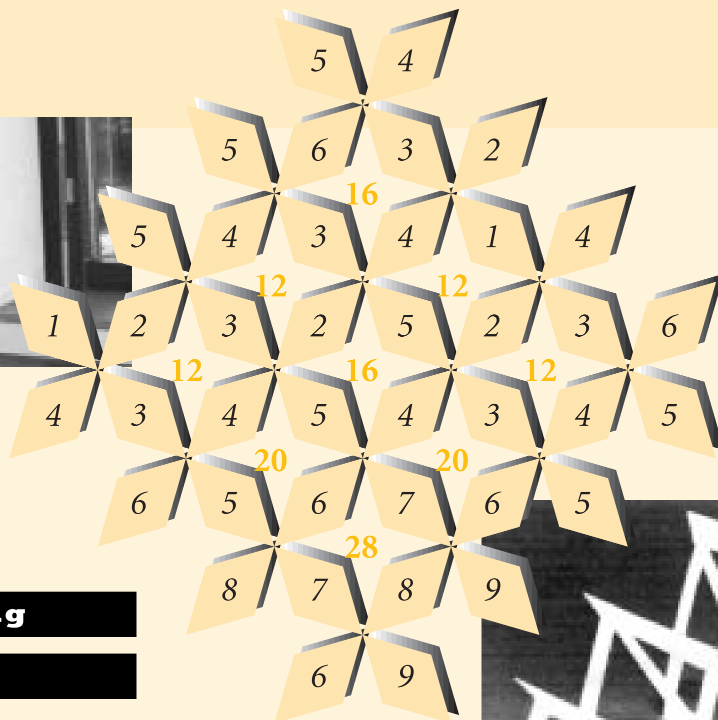
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

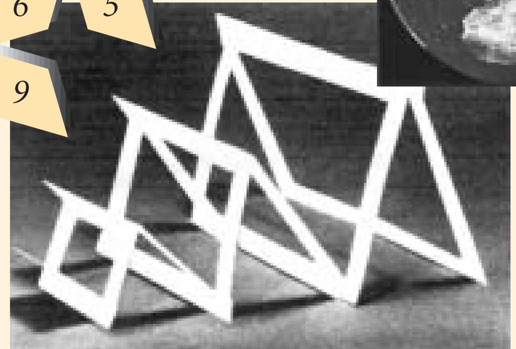
Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 73
1997-1998 nov./dec.
3





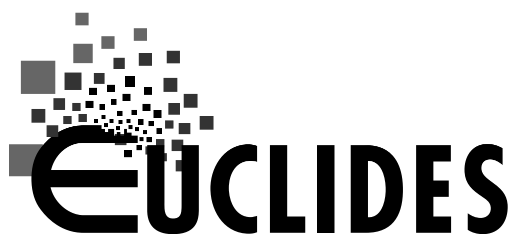




Global Positioning System

TIMSS-onderzoek

Bespreking biografie Dijksterhuis



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie per ver. jaar: ƒ 75,00
Studentleden: ƒ 37,50
Leden van de VVWL: ƒ 50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

J. van den Brink
Freudenthal instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

W. Laaper
Waleweinlaan 116
5665 CL Geldrop

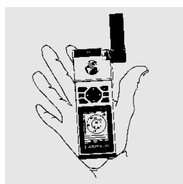
J.A. van Maanen
RU Groningen
Fac. Wiskunde & Natuurwetenschappen
Postbus 800
9700 AV Groningen

J. Perrenet
Universiteit Maastricht
p/a FdAW Informatica
Postbus 616
6200 MD Maastricht

S. Schaafsma
Betuwepad 25
5691 LM Son

H. Sissing
Narcis 30
2925 XC Krimpen ad IJssel

Inhoud



75



94



97

van de redactietafel

Meer dan 400 wiskundedocenten bezochten op 15 november 1997 de jaarvergadering en studiedag van de Vereniging. Daar was ruimschoots de gelegenheid om kennis op te doen over de veranderingen in het wiskundeonderwijs op allerlei niveaus: de ontwikkelingen bij vbo/mavo, de laatste stand van zaken van wiskunde in de Tweede Fase havo/vwo, maar ook de ontwikkelingen in mbo en hbo en de aansluitingsproblematiek die daarbij hoort. Er zijn op dit moment erg veel ontwikkelingen gaande in het onderwijs en dus ook in het wiskundeonderwijs. Het is op zich al een hele klus om al die ontwikkelingen te registreren en bij te houden. Je zou bijna vergeten dat er ook nog gewoon wiskundeles gegeven moet worden.

vbo/mavo

Bij vbo/mavo gaan de ontwikkelingen ook door. Daar is voor het wiskundeonderwijs bijzonder belangrijk hoe het verrijkingsdeel, een belangrijke component in de theoretische en gemengde leerweg, er uit zal gaan zien. Vooral voor de toekomstige mavo-leerlingen (als ze al zo gaan heten in de toekomst), zal dat een belangrijk onderdeel gaan worden voor de doorstroming naar het mbo en eventueel naar de havo. Nog in deze jaargang van Euclides hoopt de redactie u daarover nader te informeren.
Ook belangrijk voor het vbo/mavo is dat in februari 1998 de tweede generatie schoolboeken voor de basisvorming/onderbouw het licht zal zien en gepresenteerd zal gaan worden op de methodekeuzebijeenkomsten op allerlei plaatsen in het land.

havo/vwo

Op 13 november 1997 is er een brief van de staatssecretaris aan de Tweede kamer gezonden waarin nu eindelijk de resterende knopen zijn doorgehakt voor wat betreft de invulling van het wiskundeonderwijs in de Tweede Fase. Verderop in dit nummer vindt u het laatste nieuws.
De grootste *klus* op dit moment voor scholen is een verstandige verdeling van de onderdelen van het examenprogramma over de schooljaren te vinden. De grootste *zorg* lijkt echter op dit moment te zijn hoe het werken aan de praktische opdrachten gestalte moet gaan krijgen. Het integreren van onderzoeksopdrachten in het wiskundeonderwijs is voor de meeste wiskundedocenten een nieuw fenomeen. Dat het die richting op zou gaan was wel al te voorspellen. Dat het zo'n groot gewicht zal krijgen (een weging van 60% voor het cijfer van het schoolexamen), lijkt mij persoonlijk wel erg overdreven op dit moment. In de komende tijd zal ongetwijfeld duidelijker worden welke creatieve oplossingen daarvoor door secties bedacht zullen worden. Daarbij is het woord creatief op twee manieren op te vatten.
Overigens zullen op de eerder genoemde methodekeuzebijeenkomsten ook de meeste boeken voor de Tweede Fase gepresenteerd worden. Hopelijk zullen die de ergste zorg al een beetje kunnen wegnemen.
Verderop vindt u in dit nummer ook een lijstje met scholen en contactpersonen van scholen die al in 1998 starten. Misschien dat onderling contact werk kan besparen op een aantal terreinen.

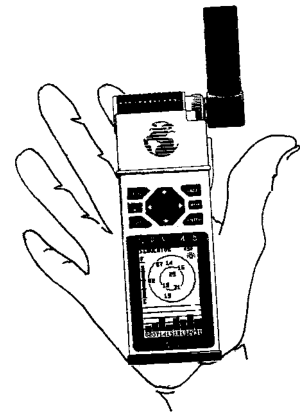
Ten slotte

Volgens menigeen ligt bij onderwijs de kracht in herhaling. Ik blijf u dus oproepen om ervaringen in de klas, met name waar het projectjes en computergebruik betreft, in te zenden voor Euclides. Laat uw collega's profiteren van uw ideeën en inspanningen. Het aanbod blijft van kracht dat de redactie u wil assisteren bij het vormgeven in een aardig artikel.
Bent u overigens al lid van de Vereniging?

Kees Hoogland

GPS en het wiskunde-onderwijs

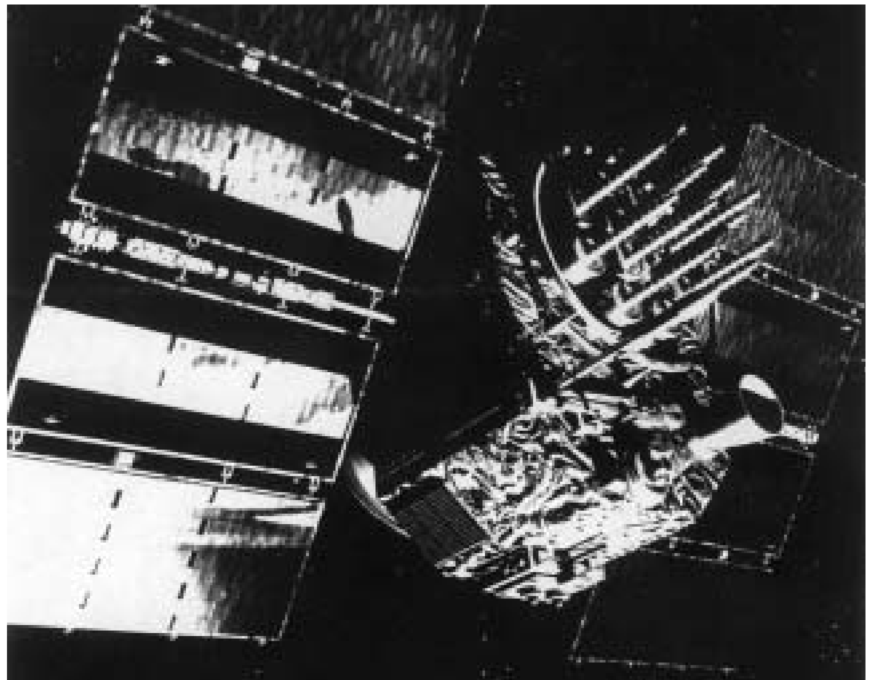
Jan van den Brink



Gps-ontvanger

Inleiding

In de wiskunde voor de vernieuwde tweede fase bestaat een toenemende aandacht voor praktische opdrachten. Dit artikel beschrijft een project met dergelijke opdrachten over plaatsbepalen met behulp van satellieten: het Global Positioning System (GPS).



Gps-satelliet

Wat heeft GPS met wiskunde te maken?

'In het begin vonden we dat plaatsbepalen meer te maken had met aardrijkskunde dan met wiskunde, maar', vervolgen Jelle, Ernest en Joost hun werkstuk, 'toen we eenmaal met het onderwerp bezig waren, kwamen we snel tot een andere conclusie'.
Drie leerlingen uit 4 vwo schreven, na drie lessen 'gps' en drie lesuren eigen onderzoek een werkstuk met als titel: *Wiskunde en het GPS-systeem.* GPS is een tegenwoordige vorm van plaatsbepalen, vinden ze, dat binnen de wiskunde thuis hoort. Waarom? Omdat ze een groot aantal onderwerpen in hun wiskundeboek vonden die ermee te maken hebben, zoals bijvoorbeeld:

- De baan van een satelliet is te vergelijken met een wiskundige functie. Er is gonio voor nodig.
- Je positie wordt nooit precies met één stel coördinaten door de gps gegeven. Je hebt dus met onnauwkeurigheden, met gemiddelden, met statistiek te maken.
- De gps moet tenminste drie satellieten ontvangen om zijn plaats op aarde te kunnen vinden. Om dat te begrijpen gebruikt men bollen om de satellieten heen als puntenverzamelingen.
- Een satelliet bestrijkt een bepaald gebied van de aarde dat je kan vinden door raaklijnen te gebruiken en de stelling van Pythagoras.
- Je kan, zo schrijven ze, met de sinus, cosinus en tangens controleren of je de gps-berekeningen wel goed hebt gedaan.
- Posities op aarde worden gegeven in graden, minuten en seconden, weten ze. Als de gps hun school met de coördinaten 52° 07.343' N en 005° 05.523' E aangeeft, bedenken ze in plaats van de seconde een nieuwe term: de '*milliminuut*'.

Uit deze opsomming blijkt dat GPS een eigentijdse manier van plaatsbepalen is volgens de leerlingen, maar ook een vorm van toegepaste wiskunde die verschillende onderwerpen uit het wiskundeboek met elkaar koppelt en vergelijkt. Boven-

dien sprak de gps sterk tot de verbeelding van de leerlingen.

'*Stel*', zo begint hun werkstuk, '*een schip vaart in de Grote Oceaan, botst ergens tegen aan en begint te zinken. Uiteraard moet er dan meteen hulp komen, maar hoe vertel je waar je bent?*'

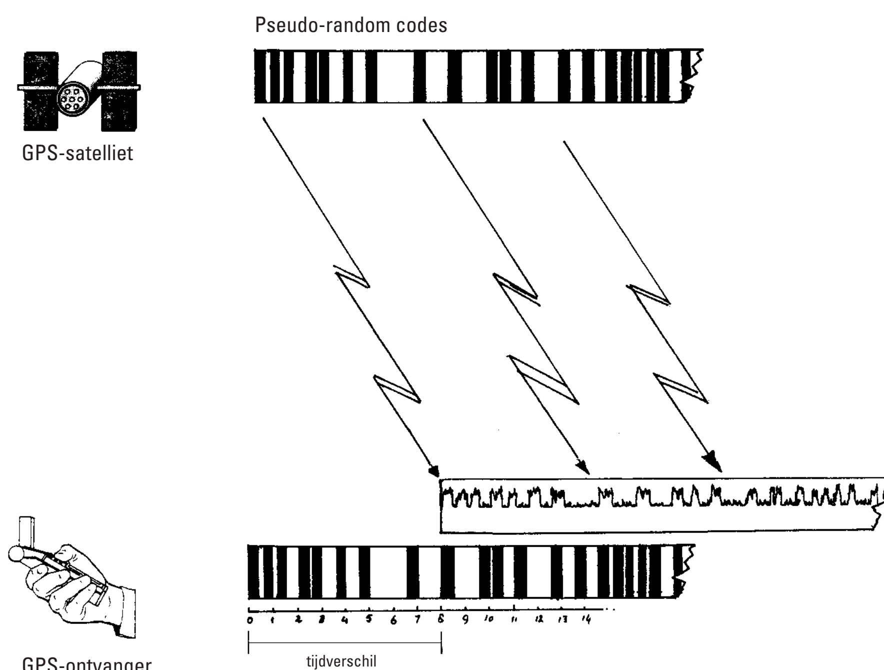
En natuurlijk brengt de gps dan uitkomst. Ook werd hun fantasie geprikkeld bij het schrijven van een hoofdstuk getiteld: Welke problemen bedachten we zélf? Ze hoefden zich niet zo zeer druk te maken om de oplossingen, maar wel om vraagstukken te vinden. De opdracht werd met veel enthousiasme uitgewerkt. Hier enkele voorbeelden.

- Zou je rond de aarde een systeem kunnen maken met stilhangende satellieten?
- Waarom vliegen geo-stationaire satellieten, zoals de Astra-tv-satellieten, alleen bij de evenaar?
- Als de gps-satellieten geo-stationair zouden zijn, hoe kunnen ze dan de polen bedekken?
- Welk gebied bestrijkt een gps-satelliet?
- Hoe kan het gebied dat een satelliet bestrijkt, toch worden gedekt door signalen als die satelliet uitvalt?
- Als de Amerikanen een opzettelijke storing in het gps-signaal weer kunnen opheffen, kunnen anderen dat toch ook?
- Als je de satellieten anders zou opstellen, zou je gps dan misschien sneller een signaal ontvangen? Want het is nu zo, dat je lang moet wachten voordat je ontvangst hebt.
- Hoe kan je weten of de gps het hele aardoppervlak bestrijkt? Je kan niet controleren in vijandig gebied.

Deze vragen zetten je aan het denken en geven aan hoe vertrouwd de leerlingen met de materie waren geworden in slechts zes lessen van 45 minuten waarin ze onder andere op het Internet naar gps-informatie zochten, een autorit om Utrecht maakten met een gps en een werkstuk schreven.

Geschiedenis en basisprincipes

Een gps is een apparaatje ter grootte van een rekenmachine dat in coördinaten Noorderbreedte en Oosterlengte je positie op aarde kan geven. De plek bijvoorbeeld waar ik u dit schrijf, 52° 06.721' NB , 005° 07.496' OL en 13 meter omhoog, is in het Freudenthal instituut. Ofschoon, ik kan ernaast zitten. Om precies te zijn: 49 meter ernaast. Maar ook dát meldt mijn gps. Even een afspraak: met 'dé gps' of 'een gps' wordt gewoonlijk de GPS-ontvanger bedoeld, die je in handen hebt. Met 'hét GPS' wordt het hele systeem aangegeven, dat vanaf 1993 bestaat.
Toen de Sovjet Unie op 4 oktober 1957 als eerste een satelliet, de Spoetnik, lanceerde, realiseerde de Westerse wereld zich met een schok dat ze achterliep. Maar ook werd de mogelijkheid ingezien om met radio-signalen vanaf een satelliet iemands positie op de grond vast te stellen. Een nieuwe manier van plaatsbepalen deed zijn intrede, met satellieten in plaats van sterretjes schieten. Altijd was er gezocht naar een navigatie-systeem dat je positie, het liefst zo precies mogelijk, kon aangeven, ongeacht het weer en waar ook ter wereld. Toen op 26 juni 1993 de laatste van de 24 GPS-satellieten in een baan om de aarde werd gebracht, was het Global Positioning System een systeem dat aan die eisen voldeed. Het bestaat uit vliegende radio-stations (de GPS-satellieten) en de radiotoestellen op de grond (de GPS-ontvangers).
Hoe werkt het systeem? Misschien kun je beter eerst vragen: hoe werkt het niet? Niet met peilingen op de satellieten om na te gaan in welke richting ze staan, zoals op radiobakens gebeurt met richtingtoestellen. Niet met lijnen van punten met een constant verschil in radiofrequentie, zoals bij de hyperboloïden



Gps-satelliet, gps-ontvanger, pseudo-randomcode

van het Decca systeem. Niet met de Dopplerverschuiving in het radiosignaal, zoals bij de Loran-satelliet. De werking van het GPS berust op ‘ranging’: hoe ver zit een ontvanger van een satelliet af? Ongeacht de richting waarin je de ontvanger zou moeten zoeken.

Range en tijd

De GPS-satellieten draaien hun banen om de aarde op circa 20.000 km hoogte. Ze hebben alle een atoomklok die exact dezelfde tijd aangeeft. Op die tijd produceren alle satellieten tegelijk hetzelfde radioprogramma. Het wordt nog gekker, want niet alleen de satellieten doen dat, ook de ontvangers op aarde maken op hetzelfde moment precies hetzelfde programma van ‘pseudo-random codes’. Dat wil zeggen een soort doorlopende streepjescode met herhalingen. Er is echter wel een verschil tussen satelliet en ontvanger: de satellieten zenden het programma uit, terwijl de ontvangers het programma van de satellieten proberen op te vangen. Als dit laatste lukt, blijkt altijd weer dat het ontvangen programma iets achter het programma aanloopt dat de ontvanger zelf maakt. Het programma dat van de satelliet moet komen, heeft namelijk reistijd nodig om de ontvanger te bereiken (tekening links).
Die reistijd wordt door de ontvanger vastgesteld en geeft de afstand tot de satelliet aan in bijvoorbeeld duizendsten van een seconde, want radiogolven gaan zo snel als het licht. De ontvanger zit dus ergens op een bepaalde afstand, op een ‘range’, een denkbeeldige ‘afstandsbol’ rondom de satelliet. Gesneden met het aardoppervlak geeft die bol een cirkel van punten waarop de GPS-ontvanger zich bevindt.
Stel dat de ontvanger op aarde tegelijk de afstand niet tot één, maar tot drie satellieten meet. Dat levert drie cirkels op. De ontvanger bevindt zich op elk van de drie cirkels. De cirkels moeten elkaar dus in één punt snijden, namelijk in de positie van de ontvanger op aarde (ten opzichte van de drie satellieten). De ontvanger toont de coördinaten van dat punt in bijvoorbeeld graden Noorderbreedte en Oosterlengte. Voor deze zogenoemde 2D-navigatie op het twee-dimensionale aardoppervlak zijn dus drie cirkels, drie satellieten nodig. Met de afstanden tot vier satellieten is bovendien de hoogte van de ontvanger boven de aarde vast te stellen. Dit levert de 3D-navigatie op, navigatie in de ruimte. Het snijpunt wordt in de gps berekend door de vergelijkingen van vier bollen op te lossen.

Opzettelijke tijdfout en zijn gevolgen

Er is echter iets merkwaardigs gebeurd. Omdat het GPS werd ontworpen voor militaire doeleinden stond men aan burgers slechts een beperkt gebruik toe (selective ability, coarse of civilian access). De vijand zou anders de signalen immers ook kunnen gebruiken. Daarom liet men de satelliettijd opzettelijk beven. Niet blind, maar volgens een bepaalde, alweer pseudo-random, code, de S/A- of C/A-code. Door deze opzettelijke tijdfout kun je je positie slechts vaststellen met helaas een afwijking van 100 meter. Alleen militairen kennen de S/A-code om hun ontvangers met de satelliettijd te laten meebeven.
De ironie wil dat gedurende twee militaire operaties, de Golfoorlog en de inval op Haïti, te weinig militaire gps-en voor handen waren. Ook burgerontvangers moesten worden ingezet. Daarom werd dus de tijdfout opgeheven in een periode waarvoor hij juist was ontworpen: midden in oorlogstijd. De precisie, zonder storing van de S/A code, bleek nu tussen de 7 en 17 meter te liggen.
Een ander opmerkelijk gevolg dat de militairen niet hadden voorzien, was dat hun opzettelijke tijdfout nieuwe technieken uitlokte om de fout te bestrijden (de ‘differential GPS’ en het 'carrier tracking', bijvoorbeeld). De nieuwe vondsten berusten onder andere op het ontvangen van de GPS-positie op een plaats waarvan de positie al bekend is. Op zo'n vast ‘differential GPS-baken’ (dGPS), bijvoorbeeld in Hoek van Holland, vergelijkt men de GPS-positie met de echte posi-

---

Als de afstand tot vijf of meer satellieten tegelijk is vast te stellen, zijn tijdcorrecties aan te brengen, voor het geval dat het klokje in de ontvanger (dat geen dure atoomklok is) niet gelijk loopt met de atoomklokken in de satellieten.

GPS heeft te maken met exacte tijd en afstandsbollen en wordt daarom ook wel NAVSTAR genoemd: NAVigation System for Time And Ranging.

Priemgetallen en π

Het getal π duikt regelmatig op als we met priemgetallen bezig zijn. Hier een voorbeeld. *Hoe groot is de kans dat twee willekeurig gekozen natuurlijke getallen relatief priem zijn (dat wil zeggen geen gemeenschappelijke deler hebben)?*

Als twee getallen een gemeenschappelijke deler hebben dan is er ook een priemgetal dat op beide deelbaar is.
De kans dat een willekeurig gekozen getal deelbaar is door 2 is $\frac{1}{2}$. Voor de priemgetallen 3, 5, 7, … zijn deze kansen respectievelijk gelijk aan $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ De kans dat beide getallen van een getallenpaar (i,j) deelbaar zijn door 2, 3, 5, … is dus resp. $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \ldots$ Waaruit volgt dat de kans dat 2, 3, 5, … geen gemene deler is van beide getallen gelijk is aan $(1-\frac{1}{4}), (1-\frac{1}{9}), (1-\frac{1}{25}), \ldots$. De kans dat beide getallen deelbaar zijn door 6 is $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$. Hetgeen gelijk is aan het product van de kansen dat 2 en 3 gemene delers zijn. We zien dus dat de kansen op gemeenschappelijke priemdelers onafhankelijk zijn.
We nemen nu de priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11, …
De kans dat een getallenpaar geen gemeenschappelijke priemfactor bezit wordt dan

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{5^2})(1-\frac{1}{7^2})\ldots$$

Euler heeft aangetoond, dat bovenstaand product gelijk is aan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Bovendien bewees hij dat deze som gelijk is aan

$$\frac{6}{\pi^2}$$

De kans op twee getallen die relatief priem zijn is derhalve

$$\frac{6}{\pi^2} \approx \frac{3}{5}.$$

Rob Bosch

literatuur

Freudenthal **Waarschijnlijkheid en statistiek**
Feller **An introduction to probability**
Knuth **Concrete Mathematics**

tie; vervolgens stelt men het verschil vast, zorgt voor correctie en zendt de verbeterde coördinaten door naar dGPS-ontvangers in de buurt (De nauwkeurigheid van de dGPS ligt tussen de 1.5 en 5 meter). Met ‘carrier tracking’, een techniek waarbij de GPS-draaggolf (carrier) als maatlat wordt gebruikt, kan men zelfs een precisie bereiken waarvan geen militair in het begin had gedroomd: tot op enkele millimeters nauwkeurig. In deze zaak van de opzettelijke tijdfout heeft de regering Clinton uiteindelijk besloten om na het jaar 2000 de fout op te heffen en het systeem onder te brengen bij het Ministerie van Vervoer.

GPS in het wiskundeonderwijs

Wiskunde vraagstukken
Deze geschiedenis van het GPS is goed te gebruiken in een klassikale introductie. Hij roept allerlei vraagstukken op. Bijvoorbeeld:
* Bij 2D-navigatie op aarde zijn drie satellieten nodig. Toon met bollen aan waarom dit zo is.
* Laat zien dat voor de 3D-navigatie vier satellieten nodig zijn door te bedenken dat de aarde zelf ook een bol is.
* Hoe lang doet een bericht erover om een GPS-ontvanger te bereiken als de satelliet pal boven de ontvanger staat? Is dat even lang als wanneer de satelliet aan de horizon staat?
* Hoe groot is het gebied op aarde, dat een GPS-satelliet bestrijkt?

Met onderwerpen uit het wiskundeboek kunnen ze worden opgelost. Bijvoorbeeld met
- de stelling van Pythagoras en raaklijnen (bij het berekenen van de grens van een overdekkingsgebied),
- berekeningen met tijd en (licht-)snelheid,
- doorsnijdingen (van de globe langs grootcirkel of parallelcirkel),
- coördinaten in de R^2 (en de R^3),
- het oplossen van vergelijkingen (van snijdende cirkels of bollen)
- codering en decodering (met pseudo-random getallen),
- gebruik van statistische technieken en maten (om de minst slechte gps-positie te vinden),
- puntverzamelingen (grenzen en foutenmarges treden op bij gps-plaatsbepaling en gps-overdekkingen).

Papieren gps of 'Echt ermee op pad'?

Men kan in de klas blijven en vraagstukken over de gps laten maken. Je kan ook met een echte gps naar buiten

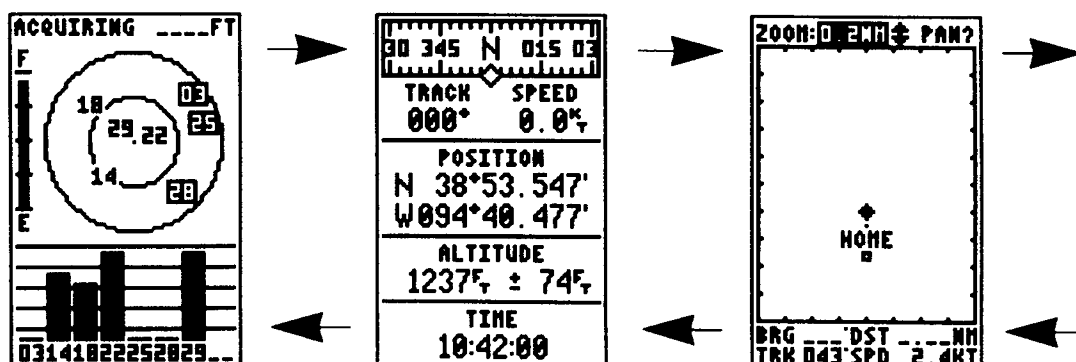
gaan. Er zitten voor- en nadelen aan beide manieren van onderwijs. Vraagstukken over de eerste manier, de 'papieren' gps, zijn problemen die anderen met de gps hebben ondervonden. Een voordeel is echter dat de hele klas ermee aan de slag kan, net als met elk ander wiskunde-onderwerp.

Voor dit doel zijn 'Sky-view', 'Position' en 'Moving-map' aantrekkelijke pagina's die je op vrijwel elke gps kan aan treffen. 'Skyview' toont de hemel met satellieten. De buitenste cirkel is de horizon rondom; het middelpunt is het punt pal boven je hoofd. 'Position' geeft de coördinaten van de plek waar de gps ligt. Ze worden steeds bijgewerkt en veranderen dus, ook al ligt de gps doodstil op het schoolplein. De 'Moving map' is een elektronische kaart waarop je je positie als een 'vierkantje' ziet bewegen en waarop je je bestemmingen kan markeren. Bij deze drie pagina's op de gps zijn wiskunde-vraagstukken te bedenken die gemakkelijk in de klas zijn aan te bieden (Van den Brink, 1997).

'Echt op pad met een gps in de hand' eist daarentegen veel meer voorbereiding en tijd. Het apparaat moet worden ingesteld en het duurt lang om erop thuis te raken. Anderzijds doen leerlingen die met zo'n ding op pad gaan allerlei ontdekkingen.

'Wat ons opviel was dat we op de terugweg naar school drie meter langs de heenweg reden, terwijl de gps aangaf dat we er wel 100 meter naast reden. Hieruit is te concluderen dat de gps er binnen bepaalde grenzen naast kan zitten' (Jelle, Joost en Ernest).

'Papieren gps' of 'Echt ermee op pad'? Ik zou zeggen: kies voor een combinatie. Klassikaal krijgt iedere leerling een minimum aantal vraagstukken over het GPS aangeboden die als toepassingen nauw aansluiten bij het wiskundeprogramma. Daarnaast kan een groepje enthousiaste leerlingen zelfstandig een klein onderzoek verrichten. Zij maken een rit of wandeling met een gps, zoeken op internet naar informatie, maken een werkstuk waarvan de inhoud bijvoorbeeld kan bestaan uit: een inleiding ('Wat is GPS?'), een overzicht van de activiteiten ('Wat hebben we gedaan?'), eigen bedenksels ('Welke problemen bedachten we zelf?'), enige reflectie ('Welke onderwerpen uit het wiskunde-boek gebruikten we?'), het verslag en het logboek van de tocht met de gps, resultaten van het zoeken op internet en in de literatuur, een slot.



Uit de flowchart

Punt	Noorder-brete	Oostenlengte	Beschrijving
Begin/school	52°07.343	005°05.523	school
1	52°07.658	005°05.942	gandiplein
2	52°08.203	005°03.755	afslag maarssen
3	52°07.145	005°01.963	oprit A2
4	52°04.155	005°04.247	knooppunt
5	52°03.869	005°08.707	knooppunt
6	52°07.154	005°08.411	Tuincentum Overvecht
7	52°07.286	005°06.931	gandiplein
8	52°07.278	005°05.520	school

Stukje logboek: punt, Noorderbreedte, ...

De toepassingen in het maatschappelijk leven brengen per jaar

1 miljard dollar op in de VS.

In Europa overweegt ESA (European Space Agency) een

satellietsysteem (NAVSAT) te ontwikkelen

dat op het GPS lijkt.

Informatie

Boeken, brochures, tijdschriften, handleidingen, maar ook via internet is veel informatie over GPS te verkrijgen. Eén adres moet in het bijzonder voor het onderwijs worden genoemd: 'John Walker' (Librorum liberorum: http://www.fourmilab.ch/). Dit levert bijvoorbeeld het programma 'Earthview', waarmee een soort blikwisseling met 'Skyview' mogelijk wordt. Je kan namelijk met 'Earthview' vanaf elke GPS-satelliet een foto van de aarde laten maken. Bijvoorbeeld vanaf de satelliet die volgens 'Skyview' pal boven mijn hoofd staat:



sat foto: 52° 7' NB , 005° 7' OL 20.000 km

Waar zou mijn gps zich bevinden op deze foto?

Er zijn veel toepassingen van het GPS in maatschappij en wetenschap.

Ten dele soms nog experimenteel.

- GPS wordt gebruikt om schepen, vliegtuigen, satellieten, autobussen en vrachtwagens te volgen, te dirigeren of op te sporen.
- Blind vliegen of varen is niet langer beperkt tot schepen of vliegtuigen in de mist. Visueel gehandicapten kunnen gebruik maken van een gps.
- Elektronische (stads-)plattegronden kunnen met gps-posities worden gekoppeld. In het algemeen laat het GPS zich gemakkelijk koppelen aan allerlei zogeheten 'GIS' (geographical information systems) op cd's.
- Het GPS wordt toegepast bij telefoon- en televisiesatellieten (Inmarsat; Astra), bij 'remote sensing': de aarde bekijken vanuit satellieten ten behoeve van milieu- en weersituaties, bij archeologie, geologie.
- GPS is in gebruik in de recreatie (watersport en bergsport), in de bouw van wegen.

Wat kost een draagbare zak-gps? In 1993, het jaar waarin het systeem operationeel werd,

kostten de meeste draagbare gps-en ongeveer ƒ 1400. Ze zijn nu (1997) voor circa ƒ 350, - te koop.

Onderwijsmateriaal

Brink, Jan van den: GPS en wiskunde-onderwijs (onderwijsleerpakket met werkbladen en suggesties), Freudenthal instituut, Utrecht 1997.

NCTM/NASA Space Mathematics Project; ESA, Noordwijk

Faculteit Geodesie, Technische Universiteit Delft.

Boeken

Hurn, Jeff. 1989: GPS, A Guide to the Next Utility, Trimble Navigation, Sunnyvale, 76 pp.

Logsdon, Tom: The Navstar Global Positioning System, Van Nostrand Reinhold, 1992.

Tijdschriften en artikelen

GPS World, twee-maandelijks tijdschrijft, uitgegeven door Advanstar Communications, 859 Williamette Street, Eugene OR 97401 USA.

The Himap: Vest, Floyd; William Diedrich & Kenneth Vos: Mathematics and the Global Positioning System, University of North Texas, Denton, TX76203-5116, USA.

Herring, Thomas A.: The Global Positioning System, in: Scientific American February 1996, 32-38.

Bezemer, Henk & Ruud Kattenberg: De GPS als navigatie-instrument (16 gps-ontvangers gerangschikt), in: Zeilen, 5, mei 1997, 118-131.

Laatste nieuws Tweede Fase

Kees Hoogland

Vwo-programma
In het vorige nummer van Euclides stond een artikel 'Stand van zaken Tweede Fase' met daarin een overzicht van de belangrijkste zaken rond wiskunde in de Tweede Fase.
Inmiddels heeft de Staatssecretaris een brief naar de Tweede Kamer gestuurd, waarin ook de laatste knopen zijn doorgehakt.
Bij het vwo-programma waren nog een paar onderdelen in beraad.

Vwo C&M:
In de vorige tabel stond:
Differentiaalrekening 40 slu óf
Grafen en matrices 40 slu
Het is nu definitief geworden:
Grafen en matrices 40 slu

Vwo N&G/N&T:
In de vorige tabel stond:

	N&G	N&T
Voortgezette kansrekening	40	40
Normale verdeling en toetsen		40

Het is nu definitief geworden:

	N&G	N&T
Niet ingevuld	40	
Normale verdeling en toetsen	40	40

Dus in de B-profielen vwo is de *Voortgezette Kansrekening* (o.a wachttijden, wachtrijen) gesneuveld.
Het onderdeel *Normale verdeling en toetsen* komt nu in beide profielen voor. De resterende 40 slu in het profiel N&G is niet nader ingevuld. Die kan dus blijkbaar gebruikt worden om onderwerpen in een rustiger tempo te doen, leerstof te herhalen of extra tijd te besteden aan praktische opdrachten. Ook betekent deze keuze dat op het vwo nu geldt dat het wiskundeprogramma van N&G een deelverzameling is van het wiskundeprogramma N&T. Dat zal menig roostermaker een zucht van verlichting doen slaken.

Starten in 1998
In de vorige Euclides stond ook een oproep aan scholen die al in 1998 starten met de Tweede Fase om zich bekend te maken. Een flink aantal scholen heeft daarop al gereageerd.
Hieronder volgt een eerste overzicht.
Uitgebreidere gegevens opgegeven door deze scholen zijn inmiddels naar de contactpersonen gestuurd die reageerden op deze oproep.
U kunt nog steeds reageren.
Adres en/of e-mail staan in colofon of bij de kalender achterin.

In 1998 in 4 vwo en 4 havo
Zernike College, Haren
Hans Klein
050 - 5340065
hklein@worldaccess.nl
Vlaardingse Openbare SG
Frank de Bruin
marfra@globalxs.nl
Pauluslyceum, Tilburg
J.J.M. Smit
013 - 4631070
smitjjm@pi.net
Cobbenhagecollege,Tilburg
013 - 4550941
P. van de Heijning
Thorbecke SG, Zwolle
J. Krüger
038 - 4601490
Kruger@noord.bart.nl
Oranje Nassau College, Zoetermeer
Mw. G.W. Fokkens
020 - 6438447
Carolus Clusius College, Zwolle
Els Franken
kwadraat@worldaccess.nl
Montessori Lyceum Amsterdam
020 - 6767855
Fred Pach
020 - 6926136
a.pach@tip.nl
Varendonckcollege, Asten
L. van Beurden
0493 - 314655
Stedelijk Dalton Lyceum, Dordrecht
Kees Nagtegaal
078 - 6161304

In 1998 alleen in 4 vwo
St. Michaël College,Zaandam
Gerard Koolstra
075 - 6124839
Gerardk@xs4all.nl
Oosterlicht College, Nieuwegein
030 - 6004800
Wout van Dijk
030 - 6042434
W.vanDijk@inter.nl.net
Jac P Thijsse College, Castricum
Johan van Wijngaarden
0251 - 652571
JohWijn@multiweb.nl
Gymnasium Bernrode, Heeswijk-Dinther
Klaas Morcus
0413 - 291341
k.morcus@pi.net
Het Baarns Lyceum, Baarn
K. Binnendijk
0347 - 371129
Stedelijk College Zoetermeer
079 - 3219325
B. de Jong
SG Reggesteyn, Nijverdal
0548 - 612166
G. Blaak
0548 - 612029
Heerbeeck College, Best
0499 - 336233
F. van Pelt
0499 - 372577
Emelwerda College, Emmeloord
A. Leijenaar
0527 - 698373

In 1998 alleen in 4 havo
Kempenpoort VO, Eindhoven
Ynske Schuringa-Schogt
040 - 2903232
F.A.Schuringa@fontys.nl

Het TIMSS-onderzoek

De Nederlandse prestaties bij de algebra-opgaven

Henk Sissing

Inleiding

TIMSS is de afkorting van Third International Mathematics and Science Study. Het TIMSS-onderzoek is een internationaal vergelijkend onderzoek naar het niveau van de leerlingen in de eerste en tweede klas bij wiskunde en ‘science’. Aan het onderzoek is door 41 landen meegedaan. In ons land zijn er 95 scholen bij het onderzoek betrokken. De uitkomsten zijn beschreven in twee rapporten. De internationale wiskunderesultaten zijn vastgelegd in het rapport: ‘Mathematics Achievement in the Middle School Years’. Aan het TIMSS-onderzoek wordt internationaal veel waarde gehecht. Zo besteedde Bill Clinton tijdens zijn State of the Union (februari 1997) aandacht aan dit onderzoek en had hij daarbij vanwege hun excellente score een aantal leerlingen uit Illinois en hun lerares uitgenodigd. Nederland scoort voor wiskunde en science voor leerjaar 1 en 2 in de top tien. Het algemene beeld is dan ook dat ons land het met betrekking tot wiskunde niet slecht heeft gedaan. Het blad Uitleg kopte in december 1996 zelfs “Nederlandse leerlingen hebben knobbels voor exacte vakken”. Tien procent van de Nederlandse leerlingen blijkt zelfs tot de beste groep leerlingen uit de wereld te behoren. In hetzelfde blad wordt echter ook gemeld dat van de zes getoetste wiskunde-onderdelen de Nederlandse tweede-klassers het slechtst scoren op het onderdeel algebra. Ook het Freudenthal instituut wijst erop dat de nationale resultaten op het gebied van algebra achterblijven bij andere landen. Tijdens een onlangs door het Ministerie van OC en W georganiseerde bijeenkomst over het TIMSS-onderzoek werden deze constateringen weer herhaald. Reden genoeg om deze constatering met behulp van de gegevens in het TIMSS-rapport aan een nader onderzoek te onderwerpen. In dit artikel wordt uitgegaan van de vraag: ‘Is het zo dat de resultaten van Nederland op het gebied van algebra achterblijven bij de internationale resultaten en die van de ons omringende landen?’ Voor het beantwoorden van deze vraag worden de prestaties van de Nederlandse leerlingen bij het onderdeel algebra eerst vergeleken met het internationale gemiddelde en daarna met dat van de ons omringende landen. Vervolgens wordt met behulp van de enkele voorbeeldopgaven nagegaan hoe onze eerste- en tweede-klassers per algebra-opgave zich verhouden tot het internationale gemiddelde per opgave. Hetzelfde gebeurt in vergelijking met de ons omringende landen.
Ik nodig u uit de opgaven te bekijken (p. 84, 86, 87). Zijn deze opgaven volgens u voldoende representatief voor de Nederlandse situatie? Welke van de opgaven heeft uw voorkeur voor een zeer hoge score door onze Nederlandse leerlingen in klas 1 en 2? En waarom?

Verhouding tot internationaal gemiddelde

Bij het TIMSS-onderzoek zijn in klas 1 en 2 dezelfde toetsen afgenomen. Daarom kunnen percentages goede antwoorden met elkaar vergeleken worden. Of de resultaten voor algebra daadwerkelijk afwijkend zijn, kunt u zien in tabel 1. In deze tabel zijn per onderdeel de nationale en internationale percentages correcte antwoorden weergegeven en is het verschil tussen beide vastgesteld.

	Aantal items	Ned. klas 1	Int. gem.	Verschil	Ned. klas 2	Int. gem.	Verschil
Mathematics Overall	151	55	49	+6	60	55	+5
Fractions & Number Sense	51	60	53	+7	62	58	+4
Geometry	23	54	49	+5	59	56	+3
Algebra	27	42	44	– 2	53	52	+1
Data Representation, Analysis & Probability	21	69	57	+12	72	62	+10
Measurement	18	58	45	+13	57	51	+6
Proportionality	11	51	40	+11	51	45	+6

Tabel 1

De Nederlandse leerlingen scoren in het eerste en tweede leerjaar bij alle onderdelen op één na boven het internationale gemiddelde. In klas 1 bij drie onderdelen zelfs ruim boven dit gemiddelde. Duidelijk afwijkend is de categorie algebra. In beide leerjaren van het voortgezet onderwijs scoren onze leerlingen relatief het slechtst op het onderdeel algebra. In klas 1 blijft het percentage correcte antwoorden voor het onderdeel algebra 2% achter bij het internationale percentage. In klas 2 is dit ingelopen en bevinden de Nederlandse leerlingen zich 1% boven het internationale gemiddelde. Het klopt dus dat de Nederlandse leerlingen in klas 1 voor het onderdeel algebra bij het internationale gemiddelde achterblijven. Uit de tabel blijkt verder dat de Nederlandse leerlingen in *klas 1* bij vier van de zes onderdelen boven het internationale gemiddelde in *klas 2* scoren. Onze Nederlandse eerstejaars hebben bij het onderdeel 'Mathematics Overall' hetzelfde niveau als de leerlingen internationaal in klas 2 bereiken.

Europees gemiddelde

Om na te gaan of de Nederlandse resultaten voor het onderdeel algebra achterblijven bij die van andere landen worden in tabel 2 de nationale resultaten vergeleken met die van de ons omringende landen. Aanname daarbij is dat de onderwijscultuur tussen deze landen weliswaar verschillen vertoont, maar dat deze verschillen kleiner zijn dan met landen als bijvoorbeeld Colombia, Japan en Singapore. Als omringende landen zijn de volgende Europese landen gekozen: België (Vlaanderen), België (Wallonië), Duitsland, Frankrijk, Engeland, Denemarken, Noorwegen, Zweden, Spanje, Portugal, Ierland, Schotland, Oostenrijk en Griekenland. In kolom 3 en 5 is de rangorde van de Europese landen aangegeven.

	Klas 1	Rangorde	Klas 2	Rangorde
België (Vlaanderen)	60	1	63	1
België (Wallonië)	44	4	53	4
Denemarken	36	10	45	11
Duitsland	39	8	48	8
Engeland	41	6	49	7
Frankrijk	39	8	54	3
Griekenland	33	13	46	10
Ierland	47	3	53	4
Nederland	42	5	53	4
Noorwegen	32	14	45	11
Oostenrijk	48	2	59	2
Portugal	31	15	40	14
Schotland	36	10	46	9
Spanje	41	6	54	3
Zweden	35	12	44	13
Europees gemiddelde	40		50	

Tabel 2: Percentage correcte antwoorden in de ons omringende landen voor het onderdeel algebra.

Uit de tabel wordt duidelijk dat de Nederlandse eerste- en tweedeklassers het in Europees verband niet slecht doen. Ten opzichte van de veertien ons omringende landen scoren zij in klas 1 2% en in klas 2 3% boven het Europese gemiddelde. In het eerste leerjaar staan de Nederlandse leerlingen in de Europese rangorde op de vijfde plaats en in het tweede leerjaar op de vierde. Hiermee kan m.i. toch niet de uitspraak overeind gehouden worden dat ons land m.b.t. de resultaten voor algebra achterblijft bij andere landen, althans niet in Europees verband.

EXAMPLE ITEM 13
ALGEBRA

Shapes in a pattern

These shapes are arranged in a pattern.

○△○○△△○○○△△△

Which set of shapes is arranged in the same pattern?

A. ★□★□★★□□★★□□
B. □★□□★□□□★□□□□
C. ★□★★□□★★★□□□
D. □□★★□★□□★★□★

Performance Category: Knowing

Scores op de algebra-opgaven

Internationaal gemiddelde
In tabel 3 wordt in kolom 1 voor de voorbeeldopgaven 13 t/m 17 uit het TIMSS-onderzoek het nationale percentage correcte

antwoorden gegeven. Dezelfde informatie vindt u voor het internationaal gemiddelde in de tweede kolom. In de derde kolom wordt het nationale percentage verminderd met het internationale. Voor klas 2 worden in de kolommen 4, 5 en 6 dezelfde gegevens in dezelfde volgorde weergegeven.

Uit deze gegevens kan worden afgeleid dat in leerjaar 1 de Nederlandse leerlingen bij opgave 14a en 14b ruim boven het internationale gemiddelde scoren. Bij opgave 13 zijn de percentages gelijk. Duidelijk onder het internationale gemiddelde scoren onze leerlingen in klas 1 en 2 bij de opgaven 15, 16 en 17. Het verschil tussen de nationale en internationale percentages neemt bij deze opgaven wel af. Ondanks deze progressie blijven de Nederlandse leerlingen in het tweede leerjaar bij opgave 15, 16 en 17 onder het internationale gemiddelde. Een positief punt is dat onze leerlingen hun achterstand t.o.v. het internationaal gemiddelde inhalen. Dit blijkt uit de vergelijking van kolom 3 en kolom 6.

Europees gemiddelde

In tabel 4 wordt analoog aan tabel 3 het Nederlands gemiddelde per voorbeeldopgave vergeleken met het Europese gemiddelde.

Uit de tabel blijkt dat onze leerlingen op opgave 14 en 17 in leerjaar 2 onder het Europese gemiddelde scoren. Het feit dat de Nederlandse leerlingen in klas en 1 en 2 voor het onderdeel algebra aansluiten bij het gemiddelde van de ons omringende, blijkt vooral gebaseerd op de score bij opgave 14b. Positief is dat de achterstand in leerjaar 2 bij de opgaven 15, 16 en 17 vermindert.

	1	2	3	4	5	6
Opgaven	Ned. kl. 1	Int. gem	Verschil	Ned. kl. 1	Int. gem	Verschil
13	87	87	–	91	90	+1
14a	82	72	+10	84	75	+9
14b	29	18	+11	38	26	+12
15	49	62	–13	65	72	–7
16	33	47	–14	51	58	–7
17	27	37	–10	45	47	–2
Gemiddeld	51	54	–3	62	61	+1

Tabel 3: Algebra-voorbeeldopgaven en de nationale en internationale verschilscores.

De voorbeeldopgaven

De voorbeeldopgaven in het TIMSS-rapport zijn voor het onderdeel algebra interessant gekozen. Opgave 13, 14a en 14b sluiten mijns inziens veel beter bij het Nederlandse onderbouwprogramma aan dan de opgaven 15, 16 en 17. De laatste opgaven doen een groter beroep op kennis van de meer formele wiskunde. Een verklarende factor voor de nationale scores bij opgave 15, 16 en 17 is de opbouw van ons nationale curriculum. Bij het bekijken van enkele gebruikte Nederlandse wiskundemethoden is duidelijk dat het soort opgaven als de opgaven 15, 16 en 17 nauwelijks in klas 1 voorkomen. Deze opgaven komen duidelijk pas later aan bod. Daaruit is te verklaren dat onze leerlingen bij deze algebra-opgaven in klas twee al veel beter scoren.

Opgave 13 over het herkennen van gelijke van patronen wordt nationaal en internationaal zeer goed gemaakt. Op Zuid-Afrika en Colombia na scoorden alle deelnemende landen tussen de 80 en 96% correcte antwoorden. De opgave is dermate eenvoudig dat de discriminerende waarde nihil is. De opgaven 14a en 14b zijn interessant en hebben mijn persoonlijke voorkeur, omdat de opgaven een beroep doen op de creativiteit en het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Twee capaciteiten die in ons onderwijs worden gewaardeerd. Het zijn vaardigheden die van belang zijn voor de persoonlijke ontwikkeling, het maatschappelijk functioneren, het vervolgonderwijs en de beroepsvoorbereiding van de leerlingen. De leerlingen worden geconfronteerd met een snel veranderende, complexe en internationale samenleving. Nieuwe problemen en snelle aanpassingen aan veranderde omstandigheden dienen zich aan op de vier genoemde terreinen. Dit vergt een goed probleemoplossend vermogen en goed ontwikkelde creativiteit.

	1	2	3	4	5	6
Opgaven	Ned. kl. 1	Int. gem	Verschil	Ned. kl. 1	Int. gem	Verschil
13	87	90	–3	91	93	–2
14a	82	77	+5	84	81	+3
14b	29	16	+13	38	25	+13
15	49	56	–7	65	69	–4
16	33	44	–11	51	55	–4
17	27	30	–3	45	42	+3
Gemiddeld	51	52	–1	62	61	+1

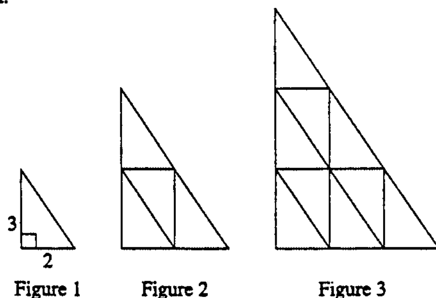
Tabel 4: Algebra-voorbeeldopgaven en de nationale en Europese scores.

Twee onderwerpen die daarom bij de komende onderwijsveranderingen in mavo/vbo, havo/vwo en de basisvorming aandacht verdienen. Het realistisch reken- en wiskundeonderwijs levert een substantiële bijdrage aan de ontwikkeling van deze capaciteiten.

EXAMPLE ITEM 14
ALGEBRA

Sequence of triangles

Here is a sequence of three similar triangles. All of the small triangles are congruent.



a. **Complete the chart by finding how many small triangles make up each figure.**

Figure	Number of small triangles
1	1
2	
3	

b. **The sequence of similar triangles is extended to the 8th Figure. How many small triangles would be needed for Figure 8?**

Performance Category: Solving Problems

Conclusie

Het is duidelijk dat de resultaten van onze eerste-klassers bij algebra 2% achterblijven bij het internationale gemiddelde. In klas twee liggen de nationale resultaten 1% boven het internationale gemiddelde. Ook is gebleken dat de Nederlandse scores alleen voor het onderdeel algebra in leerjaar 1 onder het internationale gemiddelde liggen. Het blijkt dat onze leerlingen bij de opgaven 13, 14a en 14b boven het internationale gemiddelde scoren en bij de opgaven 15, 16 en 17 er ruim onder. Waarschijnlijk is dit te wijten aan de opbouw van het Nederlandse curriculum.
De Nederlandse prestaties bij het onderdeel algebra blijken ten opzichte van de ons omringende landen niet slecht. Het gemiddelde per algebra-opgave in de ons omringende landen is in leerjaar 1 en 2 op opgave 14a en 14b na hoger. Het blijkt dat de Nederlandse leerlingen door de hoge scores bij opgave 14a en 14b in klas 1% onder en in klas 2 1% boven het Europese gemiddelde scoren. In leerjaar 1 bezet Nederland de vijfde plaats in de rangorde van vijftien Europese landen en in leerjaar 2 een vierde.
Als wij ons in Nederland in internationaal verband zorgen maken om de resultaten bij het onderdeel algebra dan lijkt het raadzaam om dat in Europees verband te doen.

Tot slot

Door de voorbeeldopgaven in het TIMSS-onderzoek ben ik mij gaan afvragen wat het belang van het algebra-onderwijs eigenlijk is voor onze leerlingen. Moeten we ons nu echt bezorgd maken of bewijst de score dat we juist op de goede weg zijn? Zijn wij in Nederland aan het bewijzen dat wiskunde niet voor de school, maar voor leven is? Welke vormende waarde heeft het algebra-onderwijs voor onze leerlingen eigenlijk? Worden ze bijvoorbeeld creatiever of kunnen ze nu en later buiten het wiskundeonderwijs beter problemen oplossen? Wat is het belang van het algebra-onderwijs voor het maatschappelijk functioneren van onze leerlingen? En hoe zit dat binnen de beroepsopleidingen?

Omdat alle landen in toenemende mate geconfronteerd zullen worden met een nationale en internationale complexiteit en snelheid van verandering en de daarbij bijbehorende problemen, lijkt het mij zeer gewenst om bij het volgende TIMSS-onderzoek meer opgaven op te nemen die een beroep doen op het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Niet omdat ons land dan zeer waarschijnlijk nog hoger zal eindigen, maar meer omdat daarmee een realistischer meting plaats vindt van vaardighe-

EXAMPLE ITEM 15
ALGEBRA

Solve linear equation for x

If $3(x + 5) = 30$, then $x =$

A. 2

B. 5

C. 10

D. 95

Performance Category: Performing Routine Procedures

EXAMPLE ITEM 16
ALGEBRA

Equivalent algebraic expressions

If m represents a positive number, which of these is equivalent to $m + m + m + m$?

A. $m + 4$

B. $4m$

C. m^4

D. $4(m + 1)$

Performance Category: Knowing

EXAMPLE ITEM 17
ALGEBRA

Expression representing number of hats

Juan has 5 fewer hats than Maria, and Clarissa has 3 times as many hats as Juan. If Maria has n hats, which of these represents the number of hats that Clarissa has?

A. $5 - 3n$

B. $3n$

C. $n - 5$

D. $3n - 5$

E. $3(n - 5)$

Performance Category: Using Complex Procedures

den die er werkelijk toe doen, nationaal en internationaal. Want moeten wij wereldwijd nu echt gelukkig zijn met grote bevolkingsgroepen die braaf een trucje leren toepassen en het juiste antwoord weten te reproduceren?
Graag eindig ik met een relativerende noot ten aanzien van het TIMSS-onderzoek, immers ook uit mijn bijdrage blijkt hoezeer de keuze van de vraagstukken dit soort onderzoek en bijbehorende ranglijstjes kan beïnvloeden.

Literatuur

Beaton, A.E. e.a.
Mathematics Achievement in the Middle School Years
United States, Boston College, 1996

Freudenthal instituut
Internationaal TIMSS-onderzoek: voor de laatste keer goed nieuws?
Universiteit Utrecht, 1997

Kuiper, W.
Nederlandse leerlingen hebben knobbels voor exacte vakken
In: Uitleg, 30, december 1996, blz. 24 -25

Gewogen stemreglementen

Rob Bosch

Inleiding

De regels die we hanteren bij het stemmen over voorstellen verschillen van parlement tot parlement en van vergadering tot vergadering. In dit artikel bespreken we een aantal van die regels. We laten zien dat een aantal ogenschijnlijk totaal verschillende regels toch onder één noemer gebracht kunnen worden. Het blijkt dat een groot aantal stemreglementen kunnen worden opgevat als een gewogen stemreglement. Dit is een reglement waarbij aan iedere stemmer een bepaald gewicht is toegekend en een voorstel wordt aanvaard als de som van de gewichten van de voorstemmers een bepaalde drempel overschrijdt.
We beperken ons in dit artikel tot stemmingen waarbij iedereen zijn stem uitbrengt. Onthoudingen of blanco stemmen zijn hierbij niet toegestaan. Men is voor of tegen een voorstel. Dergelijke stemmingen noemen we in het vervolg ja-nee-stemmingen.

Stemreglementen

In deze paragraaf geven we enkele voorbeelden van regels die gehanteerd worden bij stemmingen. We gaan vervolgens na of deze regels opgevat kunnen worden als een gewogen stemreglement.

Voorbeeld 1: De tweede kamer
De voltallige tweede kamer telt 150 leden die elk één stem mogen uitbrengen. Voor de aanname van een voorstel is een gewone meerderheid nodig dat wil zeggen meer de helft van het aantal uitgebrachte stemmen. Bij het staken der stemmen geeft de stem van de kamervoorzitter de doorslag.

Voorbeeld 2: De Europese Gemeenschap
Bij de oprichting van de Europese Gemeenschap in 1958 werd door de lidstaten het volgende reglement afgesproken:
Frankrijk, Duitsland en Italië mogen 4 stemmen uitbrengen, België en Nederland ieder 2 en Luxemburg 1. Voor de aanname van een voorstel waren 12 van de 17 stemmen nodig.

Voorbeeld 3: De veiligheidsraad van de VN
De veiligheidsraad van de VN bestaat uit 15 leden. China, Engeland, Rusland, Frankrijk en de Verenigde Staten zijn de zogenaamde permanente leden. De andere tien leden hebben slechts gedurende een beperkte periode zitting in de raad. Voor de aanname van een voorstel zijn 9 van de 15 stemmen nodig. De vijf permanente leden hebben echter een vetorecht. Een tegenstem van één van deze leden blokkeert de aanname van een voorstel.

In een stemreglement noemen we een deelverzameling van de stemmers een *coalitie*. Een coalitie is winnend indien de voorstemmen van de leden van de coalitie voldoende zijn om een voorstel aangenomen te krijgen. Een niet winnende coalitie heet een verliezende coalitie. Een groep van 76 of meer kamerleden is in een voltallige kamer een winnende coalitie. In voorbeeld 2 is bijvoorbeeld Frankrijk, Duitsland en Italië een winnende coalitie. De vijf permanente leden tezamen met vier niet-permanente leden vormen een winnende coalitie in de veiligheidsraad. In de veiligheidsraad bestaat door het vetorecht een winnende coalitie altijd uit tenminste de vijf permanente leden. Waarbij we er, zoals in de inleiding is opgemerkt, vanuit gaan dat ieder lid voor of tegen is. We merken nog op dat de verzameling van alle kiezers een winnende, en de lege verzameling een verliezende coalitie is. Als we spreken over een winnende coalitie zeggen we slechts dat als alle leden van de coalitie voor stemmen het voorstel wordt aanvaard, zelfs als alle andere leden tegenstemmen. We doen hiermee geen uitspraak over hoe de leden van de coalitie in een voorkomend geval hun stem uitbrengen. Een minimaal winnende coalitie is een winnende coalitie met de eigenschap dat als één van de leden deze winnende coalitie verlaat, de coalitie niet meer winnend is. In het geval van de Europese Gemeenschap is Frankrijk, Duitsland en Italië een minimaal winnende coalitie.

Dit geldt ook voor de coalitie Frankrijk, Duitsland, België en Nederland.
Uit deze twee voorbeelden blijkt dat een minimaal winnende coalitie niet de betekenis heeft van de kleinst mogelijke winnende coalitie. Iedere verzameling van 76 'gewone' kamerleden in een voltallige kamer is een minimaal winnende coalitie. De verzameling van 74 'gewone' kamerleden plus de kamervoorzitter is ook een minimaal winnende coalitie. Het aantal minimaal winnende coalities in de veiligheidsraad

is gelijk aan $\binom{10}{4}$

zoals de lezer zelf gemakkelijk nagaat. De in de voorbeelden gegeven stemreglementen hadden we ook kunnen beschrijven door een opsomming van de winnende coalities. In feite kunnen we ieder ja-nee-kiessysteem beschrijven door een dergelijke opsomming.

Gewogen systeem

We zien dat we stemreglementen op meerdere wijzen kunnen beschrijven. In het vervolg gaan we na welke stemreglementen we kunnen beschrijven door een gewogen systeem. Een gewogen systeem wordt als volgt gedefinieerd:
Een ja-nee-stemreglement heet een gewogen systeem indien iedere stemmer een bepaald gewicht heeft en er een quotum is, zodanig dat een coalitie alleen dan winnend is als de som van de gewichten van de leden van de coalitie groter of gelijk is aan het quotum.
We merken op dat de definitie slechts uitgaat van gewichten voor de stemmers en een bepaald quotum en dat er geen sprake is van doorslaggevende stemmen of veto-rechten.
Het stemreglement binnen de Europese Gemeenschap is uiteraard per definitie een gewogen systeem met gewichten 4, 4, 4, 2, 2 , 1 en een quotum van 12. Het stemreglement in de tweede kamer met de doorslaggevende stem van de voorzitter is ook een gewogen systeem. Om dat aan te tonen moeten we aan ieder lid van de kamer inclusief de voorzitter een gewicht toekennen en een quotum aangeven zodanig, dat een coalitie precies dan winnend is als het totale gewicht van de coalitie minstens gelijk is aan het quotum. We merken eerst op dat alle verzamelingen met minstens 76 'gewone' kamerleden winnende coalities zijn. Verzamelingen met minstens 74 'gewone' leden en de voorzitter zijn ook winnende coalities. Alle andere verzamelingen zijn geen winnende coalities. We kennen aan ieder kamerlid het gewicht 1 toe en aan de voorzitter gewicht 2. Het quotum stellen we op 76. De lezer gaat gemakkelijk na dat het totale gewicht van de winnende coalities minstens 76 is en dat het gewicht van alle andere coalities minder is dan 76. Indien niet alle kamerleden aanwezig zijn kunnen we op eenzelfde wijze gewichten toekennen. In het geval van een even aantal kamerleden kennen we aan de 'gewone' kamerleden weer het gewicht 1 en aan de voorzitter het gewicht 2 toe. Het quotum stellen we dan op de helft plus één. Waaruit volgt dat het stemreglement een gewogen systeem is. Het stemreglement met vetorecht binnen de veiligheidsraad is, wellicht tot verrassing van de lezer, ook een gewogen systeem.
Om in dit geval de gewichten en het quotum te vinden gaan we als volgt te werk. We geven de tien niet-permanente leden (voorlopig) een gewicht van 1. Het gewicht van de permanente leden stellen we op x en het quotum geven we aan met y. Aan welke voorwaarden moeten x en y voldoen? De vijf permanente leden tezamen met vier van de tien niet-permanente leden vormen een winnende coalitie. Daaruit volgt dat $5x + 4 \geq y$.
Indien één van de permanente leden geen deel uitmaakt van de coalitie is deze niet winnend, zelfs niet als alle niet-permanente leden tot de coalitie behoren. Dus $4x + 10 < y$. Uit de twee ongelijkheden volgt
$4x + 10 < y \leq 5x + 4$.
Hieruit leiden we af dat $x > 6$. Laten we $x = 7$ proberen. Uit $4x + 10 < y$ en $y \leq 5x + 4$ volgt dan dat
$38 < y \leq 39$. Waaruit volgt dat $y = 39$. We vinden voor de permanente leden een gewicht van 7 en een quotum van 39. Het is nu niet moeilijk meer om aan te tonen dat het kiessysteem in de veiligheidsraad met deze gewichten en quotum inderdaad een gewogen systeem is. Immers een winnende coalitie omvat altijd de vijf permanente leden en minstens vier niet-permanente leden. Het gewicht van zo'n coalitie is minstens
$5 \times 7 + 4 \times 1 = 39$.
Dus iedere winnende coalitie heeft een gewicht dat minstens gelijk is aan het quotum. In een verliezende coalitie ontbreekt minstens één permanent lid in welk geval het totale gewicht hoogstens
$4 \times 7 + 10 \times 1 = 38$ is, of er zijn tezamen met de vijf permanente leden hoogstens drie niet-permanente leden aanwezig; in dat geval is het gewicht hoogstens $5 \times 7 + 3 \times 1 = 38$. Iedere verliezende coalitie bereikt het quotum dus niet. Het stemreglement binnen de veiligheidsraad is derhalve een gewogen systeem. In feite kan ieder gewogen systeem waarbij bovendien aan een aantal leden een vetorecht is gegeven, worden opgevat als een gewogen systeem. Zo kunnen we een vergadering van n personen waarvan k personen een vetorecht hebben en waarbij er p stemmen nodig zijn voor de aanname van een voorstel, opvatten als een gewogen systeem. Ken aan de leden met vetorecht het gewicht $n + 1$ en aan de andere leden het gewicht 1 toe en stel het aantal stemmen nodig voor een geldige meerderheid op $kn + p$.

Voor de veiligheidsraad geeft deze toekenning de gewichten 16 en 1 en een quotum van 84. Deze toekenning is een andere dan die we eerder vonden. Waaruit blijkt dat de toekenning van gewichten niet uniek is. Zo voldoen ook de gewichten 11 en 1 en een quotum van 59. De gedachte achter deze toekenning laat zich gemakkelijk raden.
Voor de situatie waarin aan de stemmers gewichten zijn toegekend, en waarbij bovendien een aantal leden vetorecht hebben, is het vinden van het gewogen systeem iets lastiger. Dit laten we gaarne aan de lezer over.

Literatuur

Storcken A.J.A & Swart, H.C.M. de
Verkiezingen, Agenda's en Manipulatie
Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1992

Taylor, A. & Zwicker, W.
A characterization of weighted voting
Proceedings of the American Mathemathical Society,
115: 1089 - 1094, 1992

Straffin, P.
Topics in the theory of voting
Birkhauser, 1980

Van de bestuurstafel

Platform VVVO
(VVVO = vakinhoudelijke verenigingen voortgezet onderwijs)
De samenwerking van de diverse vakinhoudelijke verenigingen binnen het Platform neemt gestaag vastere vormen aan.
Zo is er een subsidieaanvraag uitgegaan voor een project om de verenigingen wat meer financiële armslag te geven bij het informeren en raadplegen van de leden en er staat een gezamenlijke aanvraag voor een website op de rol. Aan alle partijen in de Tweede Kamer is ook gevraagd om in de komende verkiezingsprogramma's het voortgezet onderwijs wat hoger op de agenda te zetten en daarbij de werkdruk van docenten niet te vergeten. De vernieuwingen vragen een extra inzet van docenten en het is niet onrealistisch om daar ook extra tijd voor ter beschikking te stellen. In het halfjaarlijks overleg op het ministerie is dit laatste een regelmatig terugkerend onderwerp.
Het platform is ook met twee personen vertegenwoordigd binnen het algemeen bestuur van de SLO (de Stichting Leerplan Ontwikkeling), dat zijn Jelle Kaldewij van de Vereniging Levende Talen en ikzelf.
Of deze activiteiten enig effect zullen hebben is natuurlijk nooit zeker, maar onder de motto's 'de gestage druppel holt de steen' en 'samen sta je sterk' gaat het platform onverdroten verder.
Er wordt momenteel gewerkt aan statuten om de samenwerking ook in formelere zin te regelen.

Tweede fase havo/vwo
Zoals u in het vorig nummer hebt kunnen lezen is er rond de definitieve vaststelling van de examenprogramma's nog veel te doen. Het bestuur probeert de vinger aan de pols te houden en waar mogelijk tijdig te reageren op de voorgestelde veranderingen.
Zo hebben we bijvoorbeeld voor C&M vwo geadviseerd het onderdeel 'Grafen en Matrices' op te nemen, en niet de 'Techniek van het differentiëren' (zie Euclides 73-2), omdat het eerste relevanter is voor deze leerlingen en het tweede makkelijk alleen een kunstje wordt. Voor het onderwerp wachtrijen (voortgezette kansrekening) hebben we gepleit voor een voortgezet experiment, omdat we het een zinnig onderwerp vinden, maar de basis voor invoering is nu te smal. Tijdens het rumoer afgelopen zomer over 'wiskunde verplicht voor alfa's' hebben we tevergeefs geprobeerd aandacht te krijgen voor het feit dat het maar om een uiterst beperkt aantal leerlingen ging, de emoties waren te sterk, de alfa moest gered. Of dat laatste gelukt is laten we aan uw eigen beoordeling over. Het heeft wel in vier vwo enige lastige gevolgen voor de invulling van het programma.

Praktische opdrachten
Een nieuw fenomeen is de praktische opdracht in het schoolexamen. Het feit op zich achten we een goede zaak, we zien zeker het nut van praktische opdrachten in de wiskunde en staan positief tegenover het zoeken naar mogelijkheden om praktische opdrachten een reguliere plaats te geven binnen het wiskunde-onderwijs.
Maar dat de resultaten van de praktische opdrachten zoveel gewicht krijgen vinden we onverstandig.
Momenteel proberen we dan ook op diverse plaatsen onze zorgen over de regeling met de praktische opdrachten in het schoolexamen over het voetlicht te krijgen.
In een brief aan de staatssecretaris en PMVO hebben we betoogd dat het gewicht van de praktische opdracht relatief te groot is in verhouding tot de daaraan bestede tijd. Daarbij bestaat er bij wiskunde geen traditie van praktische opdrachten, die kunst moeten we nog leren, en dat levert ook een risico op.
Onze bezwaren zijn gedeeltelijk te ondervangen door het introduceren van een groeimodel. Om over dit nieuwe onderwerp enige kennis van zaken op te bouwen is een veilige experimenteeromgeving voor docenten en leerlingen een noodzaak. Het ontwikkelen van goede praktische opdrachten is een vak apart, waar een extra inspanning voor nodig is. Het vinden van een geschikte, niet al te fraudegevoelige, vorm zal ook nog wat voeten in de aarde hebben. Het ontwikkelen van een goed instrumentarium voor het beoordelen van zo'n opdracht kost ook tijd.
We pleiten daarom voor een groeimodel, waarbij op zijn minst gedurende een aantal jaren de praktische opdracht minder gewicht heeft en daardoor niet zo zwaar bepalend voor het resultaat, dat het niet mag mislukken.

De zebra is los!
Zoals we al eerder meldden heeft de NVvW het initiatief genomen om te komen tot een reeks van boekjes over interessante onderwerpen voor leraar en leerling in het vwo als invulling van het keuze-onderwerp, de Jan Breemanreeks genaamd. Die plannen zijn nu in een zeer concrete fase gekomen, een volgende keer meer daarover en ook over een eventuele bijdrage van uzelf…

U hoort nog van ons!

Marian Kollenveld

Antwoorden op de puzzelvragen uit het programmaboekje van de jaarvergadering/studiedag 1997

Puzzeloplossingen

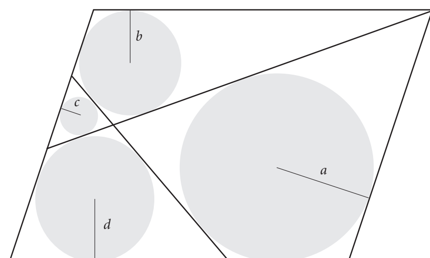
SJOERD SCHAAFSMA

Pagina 5

Deze tekening berust op twee zaken.

1 De vierhoeken in het parallellogram moeten ingeschreven cirkels hebben.

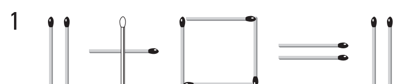
2 Voor de stralen van deze cirkels geldt $a + b = b + d$.



Literatuur: The Pattern Book, pagina 96 -99 en de verwijzingen; editor: Clifford A. Pickover.

Pagina 10 en verder

1



2 9 juli 1997 geschreven in de Engelstalige notatie 7997.

3 Leg de liniaal op een van beide einden. Meet nu de afstand van bijvoorbeeld A t/m de liniaaldikte. Trek de dikte van de liniaal er af. Neem het dubbele van (de lengte van de cilinder min de gevonden lengte). Dit is de gevraagde afstand AB.

4 cot 90˚ = 0 zodat het antwoord 0 is.

5 50 gulden.

6 38˚ Zuiderbreedte en 94˚ Oosterlengte.

7 $A = 5$; $B = 7$; $C = 8$; $D = 3$ *en* $E = 2$.

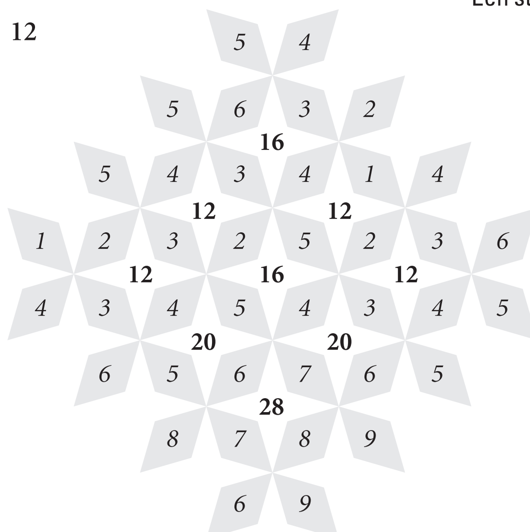
8 30˚.

9 Het woord Romeinse is de sleutel: C I V I L.

10 7

11 5/16

12

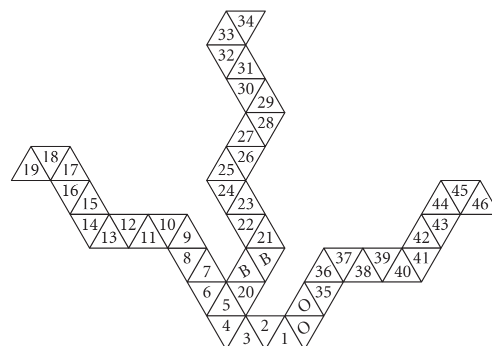


Pagina 14

Schaak. 1. Da8 pb2/pc3/pd4
2. Kc2/Kb3/Dhl mat.

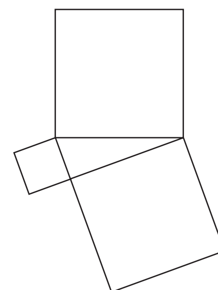
Pagina 18

Vlecht. B op O; B op O; 8 op 22; 9 op 27; 35 op 7; 36 op 6; 39 op 11; 40 op 10; 23 op 38; 24 op 37; 27 op 42; 12 op 42; 12 op 26; 13 op 25; 28 op 41; 29 op 1; 14 op 4; 15 op 3; 19 op 30; 43 op 15; 17 op 29; 44 op 14; 45 op 5; 46 op 20; 31 op 46 en 33 op 45. De losse einden naar binnen steken.



Pagina 18

Eenlijner.



Pagina 21

4617 + 97621 = 102238.

Pagina 23

Een standaard met mogelijke tekst.

Wintersymposium 1998

Wiskunde van de Sociale Keuze Verkiezingen, verdelingen en koppelingen.

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal in 1998 plaatsvinden op **zaterdag 3 januari** en wordt gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort. Het symposium is in de eerste plaats bedoeld voor leraren maar uiteraard is iedere belangstellende van harte welkom.
Het symposium is dit keer gewijd aan de *Sociale Keuzetheorie*.
Aan de orde komen *verkiezingen, verdelingen en koppelingen*.
De uitslag van een verkiezing wordt niet alleen bepaald door de uitgebrachte stemmen maar ook door het kiessysteem. Dit roept de vraag op of er zoiets bestaat als het beste kiessysteem. Indien zo'n kiessysteem niet bestaat wat zijn dan de bezwaren van de diverse kiessystemen? Deze en andere vragen worden besproken in de voordracht over verkiezingen en manipulatie. In de voordracht over kostenverdeelproblemen komt de vraag aan de orde hoe we de kosten van bijvoorbeeld publieke goederen over de gebruikers moeten verdelen. Is er een voor iedereen acceptabele verdeling? Wat zijn de voor- en nadelen van de mogelijke verdeelregels? Bij de voordracht over koppelingen wordt ingegaan op de vraag of er stabiele koppelingen bestaan voor onder andere het huwelijksprobleem en het kamergenootprobleem. Interessant is daarbij de vraag of we door onjuiste voorkeuren op te geven de uitkomst gunstig kunnen beïnvloeden.

Programma:

9.30 - 10.00
Ontvangst met koffie

10.00 - 11.00
Verkiezingen en Manipulatie
prof.dr. H.C.M. de Swart

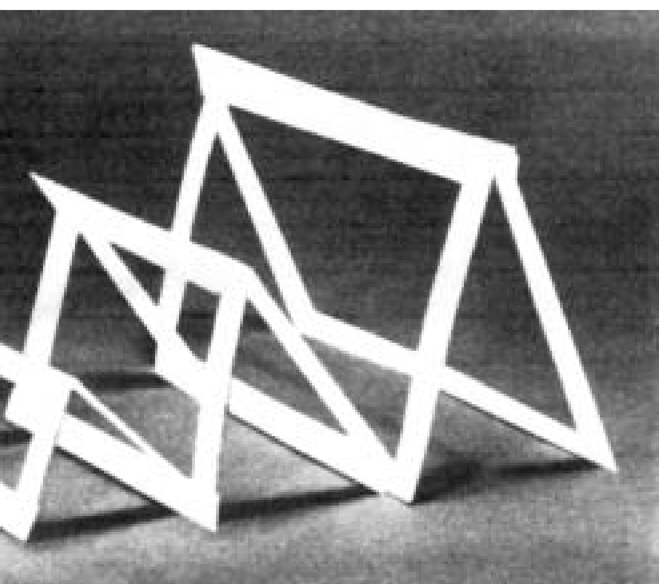
11.00 - 11.15
Pauze, met koffie

11.15 - 12.15 uur:
Kostenverdeelproblemen
prof.dr. H.J.M. Peters

12.15 - 13.30 uur:
Pauze, waarin men kan deelnemen aan een gezamenlijke lunch

13.30 - 14.30
Machiavelli in matching situaties
Prof.dr. S. Tijs

De deelname is gratis.
Wie wil meedoen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor 31 december 1997 ƒ17,50 over te maken op gironummer 3391318 t.n.v. R. Bosch, Heiakker 16, 4841 CR Prinsenbeek.
U kunt bij betaling opgeven of u een certificaat wenst door de vermelding 'certificaat'. Indien u niet wilt deelnemen aan de lunch maar wel een certificaat wenst kunt u een briefje sturen naar bovengenoemd adres.
Voor inlichtingen kunt u bellen naar
076 - 5273267 (overdag) of
076 - 5419757 ('s avonds).



Aangeboden

Aangeboden tegen verzendkosten:
Wiskobas-serie, compleet;
NICO (Papy c.s.) nrs. 1 t/m 24.
Tel. 0252 - 213499 of 071 - 4024201.

'Wiskunde-onderwijs zonder bewijzen is geen wiskundeonderwijs!'

Prof.dr. H.C.M. de Swart, 53 jaar, studeerde wis- en natuurkunde in Nijmegen en is sinds 1980 hoogleraar Logica en Taalanalyse aan de Katholieke Universiteit Brabant.

U doceert wiskunde en logica binnen de filosofische faculteit. Waaraan moeten we denken bij de vakken wiskunde en logica voor filosofiestudenten?
Logica is een traditioneel onderdeel van de Wijsbegeerte en is nauw verbonden met de zogenaamde Analytische Wijsbegeerte. Veel geschriften in de analytische traditie zijn niet goed te begrijpen zonder een gedegen kennis van de logica. Filosofie is - evenals wiskunde - een niet-empirische wetenschap. Daarom hebben beide wetenschappen steeds een bijzondere aandacht gehad voor het redeneren, met andere woorden voor de logica. Door de hoge graad van precisie is de logica vanzelf wiskundig van aard. Daardoor helpt dit vak de student te trainen in helder en analytisch denken. Dit zou overigens ook bereikt kunnen worden door andere wiskundevakken te doceren.

Bij iedere verandering van het onderwijsprogramma komt de vraag weer aan de orde of filosofie een plaats moet krijgen in dat programma. Denkt u dat het nuttig en



zinvol is om het vak filosofie te onderwijzen in de bovenbouw van het havo en vwo? En zo ja wat zou dan de inhoud moeten zijn van dat vak?
Het is mijns inziens zinvol het vak filosofie te onderwijzen op de middelbare school, mits je een 'goede' docent daarvoor hebt. Wat betekent 'goed'? Iemand die de studenten weet te interesseren, die enthousiasme en liefde voor het vak uitstraalt en bovenal verwondering bij de studenten weet te wekken. Iemand die de studenten kan laten zien dat dingen ook anders zouden kunnen zijn. Dat zijn iets anders is dan behoren te zijn. En dat eenduidige definities van rechtvaardigheid, dapperheid en dergelijke niet te geven zijn. De leraar filosofie zou een Socrates dienen te zijn die de studenten middels vragen doet inzien dat hun oorspronkelijke meningen niet houdbaar zijn. De inhoud van het vak zou ik erg laten afhangen van de specifieke competentie van de docent. Ikzelf zou voor het lezen van gedeelten uit Plato kiezen.

Bij het nieuwe programma voor het vak wiskunde komt er ruimte voor keuzeonderwerpen. Logica is genoemd als een mogelijk onderwerp. Zou u het een goede zaak vinden als logica een plaats krijgt binnen het onderwijs? Op welke wijze zou dat dan gestalte moeten krijgen? Logica als zelfstandig vak voor velen, logica als onderdeel van de wiskunde of logica in het kader van het computeronderwijs?
Logica en verzamelingsleer zou een aantrekkelijk keuzeonderwerp binnen de wiskunde kunnen zijn. In het computeronderwijs zou logica en logisch programmeren een interessante rol kunnen spelen. Persoonlijk ben ik echter van mening dat Euclidische en niet- euclidische meetkunde, als ook de theorie van de reële getallen, de student een

beter inzicht geven in de aard van de wiskunde.

Bewijzen zijn lange tijd niet aan de orde geweest in het wiskundeonderwijs. Met de komst van het nieuwe programma lijkt daar verandering in te komen. Juicht u de terugkeer van het bewijs in het wiskundeonderwijs toe?
Wiskundeonderwijs zonder bewijzen te geven is geen wiskundeonderwijs! Het is evenmin studentvriendelijk, omdat je de student het wezenlijke inzicht onthoudt. De meeste bewijzen zijn kort en eenvoudig en leveren de student de basisinzichten waar alles om draait. Natuurlijk moet je een lang en/of moeilijk bewijs wel eens overslaan; maar dat moet je dan ook duidelijk zeggen. Het is belangrijk dat de student het verschil leert kennen tussen iets goed begrijpen en iets niet goed begrijpen. Het consequent weglaten van bewijzen degradeert de studenten tot apen die een aantal kunstjes moeten leren.



U krijgt bij de filosofie waarschijnlijk te maken met zowel studenten met een α als een β-vooropleiding. Is er een meerwaarde aan te geven van een β-vooropleiding voor de studie filosofie?
Ik denk dat een student met een β-vooropleiding een wat beter ontwikkeld gevoel kan hebben voor het onderscheid tussen iets goed begrijpen en iets eigenlijk niet goed begrijpen. Dit gevoel acht ik belangrijk. Mijns inziens zijn sommige filosofen - hoe boeiend ze overigens ook kunnen zijn - gewoon niet echt goed te begrijpen. Menig student verkeert ten onrechte in de waan dat de filosoof in kwestie in principe wel helder is.



U houdt zich onder andere bezig met de sociale keuzetheorie. Kunt u aangeven waar het in de sociale keuzetheorie om gaat en welke rol de wiskunde daarin speelt?

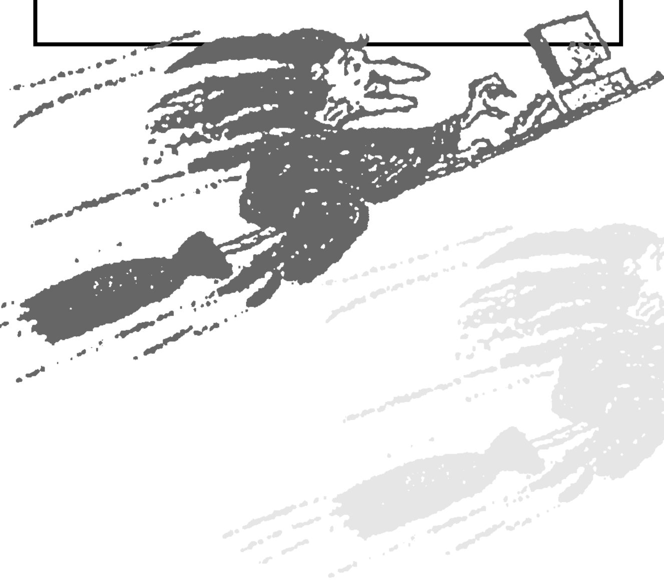


Bijvoorbeeld bij verkiezingen kunnen individuen hun voorkeuren uitspreken voor de geboden alternatieven. Deze individuele voorkeuren moeten vervolgens geaggregeerd worden tot een sociale voorkeur of keuze. Deze aggregatie is dus een functie, die aan een n-tal individuele voorkeuren een sociale voorkeur toevoegt. Er zijn vele van dergelijke functies denkbaar. Bijvoorbeeld de dictatoriale functie, die per definitie aan elk n-tal de voorkeur van één bepaalde persoon, de zogenoemde dictator, toevoegt. Aan de aggregatiefunctie willen we meestal een aantal eigenschappen opleggen; hij moet niet dictatoriaal zijn, anoniem, niet manipuleerbaar, neutraal etc. In de jaren 50 bewees K. Arrow dat een aantal van deze eigenschappen tezamen inconsistent zijn. Daarmee was de sociale keuzetheorie geboren: het bepalen onder welke voorwaarden aggregatiefuncties bestaan die aan zekere eigenschappen voldoen. Door de hoge graad van precisie is dit vak een onderdeel van de wiskunde, dat nog steeds in ontwikkeling is.

Rob Bosch

Meisjes gezocht

De **WITCHES** (Women In Training for Computer Hero) zijn meisjes die het leuk vinden te leren programmeren. Voor deze meisjes wordt er ook volgend jaar weer een WITCH-cursus gegeven. De WITCH-cursus is een programmeercursus voor meisjes van 12 tot 18 jaar.
In het schooljaar 1997/1998 willen wij weer een beginners- en een gevorderdencursus geven in vijf weekeinden. **Met name voor de beginnerscursus zoeken wij deelneemsters**.
Het blijkt dat meisjes vaak niet zelf op het idee komen om aan een dergelijke cursus deel te nemen, terwijl ze het wel leuk vinden als ze eenmaal bezig zijn. Zij moeten daartoe aangespoord worden. Misschien dat u, als ouder of docent, de meisjes kunt informeren over het bestaan van deze cursus.
Voor informatie kunt u zich wenden tot **Marjo Bollen**, tel. 030 - 2318030 (na 20.00 uur of donderdag overdag).
De inschrijving stopt half december. Dan wordt er tevens beslist of de deelname voldoende is om de cursus te laten doorgaan.
Inschrijvingen kunnen verzonden worden naar:
Centrum Vrouwen en Exacte Vakken
Postbus 85475
3508 AL Utrecht



UITLEG 17 september 1997

Examens mavo en vbo

a. *Wiskunde Nieuw Programma, gele katern nr. 27/28 van 22 november 1995.*
Het programma voor dit vak is zeer sterk veranderd en zorgvuldig ingevoerd. Het is van belang goed op de hoogte te zijn door het raadplegen van eerdere examens inclusief correctievoorschriften, voorlichtingsmateriaal, zoals artikelen in *Euclides* en de Wiskrant. Bij de examens 1997, eerste tijdvak, zijn er door de CEVO supplementen aan de correctievoorschriften toegevoegd; ook deze bevatten belangrijke informatie. Voor het centraal examen zijn de volgende publicaties van belang:
1 Syllabus voor het centraal examen wiskunde vbo-D, vbo-C, mavo-D en mavo-C, ingaande examenjaar 1996-1997. In deze CEVO-Cito-publicatie staat onder andere een toelichting bij de eindtermen van het nieuwe examenprogramma en een paragraaf over vraagvormen en vraagformuleringen zoals die op het examen kunnen voorkomen. Ook is veel aandacht besteed aan taal- en notatiegebruik in de examens.
2 Een *Euclides*-special over de experimentele examens van 1996 waarin wordt ingegaan op de ervaringen van experimenteerscholen, knelpunten, nuttige tips et cetera, onder het motto ‘van leraren voor leraren’. De speciale uitgave van de NVvW werd in oktober 1996 aan alle mavo- en vbo-scholen toegezonden.
3 het examen wiskunde 1997, een handreiking voor docenten van vbo en mavo. Dit is een uitgave van het Fi, in samenwerking met CEVO en Cito. Deze publicatie gaat over de voorbereiding op het examen aan de hand van examenvragen uit 1996. De publicatie is aan alle mavo- en vbo-scholen toegezonden.
b Het centrale examen zal in grote lijnen overeenkomen met de experimentele examens van 1996 en de reguliere examens van 1997. **Wat de moeilijkheidsgraad betreft is het examen van 1996 maatstaf.** In verband met de landelijke invoering is in 1997 gekozen voor relatief makkelijke examens.
c Hulpmiddelen
Met ingang van 1998 is het tabellenboek niet meer toegestaan, maar alleen nog de elektronische rekenmachine. De regels over het toegestane gebruik van de andere hulpmiddelen (liniaal, passer, e.d.) veranderen niet (zie syllabus).

bespreking

Klaas van Berkel

Dijksterhuis, een biografie

Amsterdam, Bert Bakker, 1996
640 pag., ƒ 75,00
ISBN 90 351 1694 1



Dijksterhuis, kind en vader van Euclides

Als de Dijksterhuis-biografie van de Groningse historicus Klaas van Berkel ergens besproken moet worden, dan is het wel in *Euclides*. Dijksterhuis stond in 1924 aan de wieg van het tijdschrift, dat zijn leven begon als *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, en lange tijd was *Euclides* zijn belangrijkste wiskundige uitlaatklep. Tussen 1924 en begin jaren vijftig schreef hij er een aanhoudende stroom van artikelen voor, met name over wiskundeonderwijs en geschiedenis van de wiskunde. Zo verscheen zijn boek over Archimedes in de jaren '40 eerst in afleveringen in *Euclides*. De biografie, die veel aandacht besteedt aan de relatie tussen Dijksterhuis en *Euclides*, inclusief de inhoud van zijn artikelen, is tegelijkertijd een 'biografie' van het tijdschrift in zijn beginjaren. Veel zaken die zich tussen de twee wereldoorlogen afspeelden, hebben niet aan actualiteit ingeboet. De discussie uit het midden van de jaren twintig tussen Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa en Dijksterhuis over het meetkundeonderwijs, en andere stukken over de vraag wat nu eigenlijk goed en zinnig wiskundeonderwijs is, blijven relevant. Dijksterhuis was een 'kind van Euclides' in die zin dat hij Euclides' deductieve opbouw van de meetkunde als model voor zijn eigen meetkundedidactiek zag. Zijn extreem Platonistische verdediging van de deductieve opbouw ('epistemisch' noemde hij het wiskundeonderwijs dat zo te werk ging en gericht was op het begrijpen van de grondslagen) zal vandaag nog maar door weinigen ondersteund worden, maar de argumenten spreken door de nauwkeurigheid en gedrevenheid waarmee hij ze naar voren bracht nog steeds aan. Dijksterhuis was op dat moment leraar wis- en natuurkunde aan de Rijks HBS in Tilburg (hij werd daar in 1919 aangesteld en bleef er tot hij in 1953 hoogleraar werd), en net getrouwd. Na deze inleiding is het is tijd om Dijksterhuis even zelf aan het woord te laten. In 1925 geeft hij een stereotiep van de wiskundige:

'De man komt voor u staan; hij heeft een bord en een stuk krijt; hij heeft niets gezien of ervaren, waarvan hij verslag komt doen; hij heeft geen apparaten noodig, om verschijnselen in het leven te roepen, die tot vragen aanleiding geven, maar hij bouwt een onstoffelijke wereld voor u op uit wat schijnbaar niets is. Hij hoeft niet eens te eischen, dat ge al wat weet, …'

Tekenend is de trits man/bord/krijt, maar wat hij daarna zegt is helemaal Dijksterhuis ten voeten uit. Zo was zijn wiskunde: een onstoffelijke wereld, ontsproten aan de geest van de wiskundigen. Wiskunde bestaat alleen in de Platonische ideeënwereld, en moet volgens Dijksterhuis ook als zodanig onderwezen worden.

Dijksterhuis, die vooral als wetenschapshistoricus bekend geworden is, ook internationaal, begon zijn loopbaan als wiskundige. Hij studeerde het vak van 1911 tot 1917 in Groningen, bij Schoute, Schuh en Barrau. Deze laatste, die in 1913 de eerder dat jaar overleden Schoute opgevolgd was als hoogleraar in de meet-

kunde, was ook zijn promotor, op 1 juni 1918, binnen een jaar na het doctoraal examen. Met het proefschrift over het platte schroevenvlak kan Van Berkel niet zo goed uit de voeten. Hij citeert er Struik over, die het een 'plichtmatig werkstuk' vond, 'knap, maar erg provinciaal.' Zulke uitspraken, waarin Van Berkel het oordeel van een wiskundige overneemt, treffen we vaker aan. Ik kom op het 'overgenomen oordeel' straks nog terug.
Tijdens zijn leraarschap heeft Dijksterhuis een enorme wetenschappelijke productie geleverd, die Van Berkel op zeer informatieve wijze behandelt. Ik noem hier de - aanvankelijk door Noordhoff uitgegeven- boeken: *Val en worp* (1924), *De Elementen van Euclides* (2 delen, 1929,1930), *Descartes als wiskundige* (1930), *Archimedes* (1938), *Vreemde woorden in de wiskunde* (1939, 2e herz. ed. 1948), *Simon Stevin* (1943) en *De mechanisering van het wereldbeeld* (1950). Van Berkel stelt steeds de inhoud van de publicaties en lezingen centraal, maar telkens lezen we ook hoe ze tot stand kwamen. Mooi is daarbij bijvoorbeeld de haat-liefde verhouding met de uitgever. Noordhoff, die zich liet adviseren door Wijdenes, wilde graag wat voor Dijksterhuis doen maar liever geen verlies lijden. Klassikaal gebruik van Noordhoffs schoolboeken en een positief oordeel in besprekingen kon de uitgever natuurlijk iets milder stemmen. Maar Dijksterhuis deed meer dan boeken schrijven. Hij maakte deel uit van verschillende leerplan-commissies, nam stelling in discussies, was in zijn woonplaats Oisterwijk voorzitter van een zwemvereniging zonder bad, en voerde van 1940 tot 1960 het secretariaat van Nederlands belangrijkste cultureel-literaire tijdschrift, *De Gids*, waarin hij ook regelmatig over het culturele belang van de wiskunde schreef. Verder waren Dijksterhuis en zijn vrouw Hannie in 1940 bijna twee maanden lid van het fascistische Nationaal Front van hun dorpsgenoot Arnold Meijer en liet hij zich in 1944 benoemen tot hoogleraar aan de universiteit van Amsterdam, die nog slechts door Duitsgezinden bestuurd en bevolkt werd. Dat is wel het duidelijkste bewijs dat Dijksterhuis in een wereld leefde waarin niet mensen maar gedachten voorop stonden. Naast zeker honderd pagina's beschouwingen *over* de wiskunde is er zelfs een beetje echte wiskunde in het boek te vinden. Ik haal er twee zaken uit, die Dijksterhuis beide aanhaalde in zijn pleidooi voor 'epistemisch' wiskunde-onderwijs. Van Berkel geeft uitvoerig aandacht aan dit thema. Het is gezien de huidige discussies over het wiskundeprogramma in de bovenbouw van havo en wo zeer actueel. Nog steeds duikt af en toe de vraag op of wiskunde logisch-deductief of intuïtief-inductief onderwezen moet worden en deze passages zouden tot de verplichte literatuur van alle plannenmakers moeten behoren. We horen Dijksterhuis in zijn pleidooi voor deductieve opbouw: Gevraagd wordt, op welke wijze drie vlakken, *A*, *B* en *C* ten opzichte van elkaar gelegen kunnen zijn. Men merkt nu bijvoorbeeld op, dat er twee mogelijkheden zijn: de vlakken *A* en *B* snijden elkaar volgens een rechte *l* of ze snijden elkaar niet. In het eerste geval zal de rechte *l* óf het vlak [*C*] snijden in een punt *O*, óf er evenwijdig aan loopen óf er in liggen. Wanneer men nu, weer de eerste van deze mogelijkheden vervolgend, concludeert, dat de vlakken dus zoo gelegen kunnen zijn, dat ze een punt gemeen hebben, spreekt men dan niet met volledig juist begrip een correcte stelling uit, *ook als men zich geen drievlakshoek kan voorstellen*? [cursivering van Dijksterhuis] Moet men werkelijk steeds aan een stoffelijk ding het bestaan van dit geval hebben opgemerkt ... ? Dijksterhuis gebruikt deze wiskundige passage als argument ten voordele van het epistemisch onderwijs. Je kunt door zuiver redeneren met een zeer beperkt aantal begrippen en regels de wiskunde zonder empirie opbouwen. Van Berkel heeft in de biografie zelfs formules opgenomen. Ook hier gaat het om een passage waarin Dijksterhuis een wiskundig voorbeeld geeft ter ondersteuning van zijn keuze voor epistemisch onderwijs. De manier waarop de meeste leerlingen haakjes hebben leren uitwerken, zegt hij, leidt tot automatismen als:

$$\begin{aligned} c(a+b) &= ca+cb \\ d(a+b) &= da+db \\ p(a+b) &= pa+pb \\ &\vdots \\ \sqrt{(a+b)} &= \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{aligned}$$

Opnieuw is de moraal duidelijk: begrijpen staat voorop, routine kan daarop volgen, maar zonder werkelijk inzicht komt routine niet verder dan de illusie van het kennen. Wat Van Berkel aan wiskunde geselecteerd heeft is maar een fractie van wat Dijksterhuis geproduceerd heeft, en ik had er graag wat meer van gezien. Maar wat er staat is mooi en wie meer wil kan via de uitgebreide noten zo haar of zijn weg vinden. Zoals eerder opgemerkt vind ik het 'overgenomen oordeel' een minder sterk element in het boek. Van Berkel is geen wiskundige. Maar hij wil wel af en toe uitspraken doen over wiskunde. Daarvoor baseert hij zich regelmatig op het oordeel van anderen. Dat leidt tot passages, waarop ik eerder doelde, als: 'De promovendus heeft dat vervol-


Hans Freudenthal als jong hoogleraar, ca 1947

gens braaf gedaan en speciaal aandacht besteed aan de meetkundige facetten van de theorie. Maar alles zo te zien zonder veel enthousiasme. (...) Hoe het ook zij, een tijdgenoot noemde de dissertatie later 'knap, maar erg provinciaal' '. Dit gaat over werk uit 1918; de tijdgenoot is Dirk Struik, en 'later' is in 1989. Op dezelfde wijze wordt een oordeel van Van der Blij overgenomen, die Dijksterhuis' werk aan de classificatie van de regelvlakken van de vierde graad 'hogere boekhoudkunde' en ook voor wiskundigen bepaald niet enerverend vindt. Wat later stelt Van Berkel vast dat Dijksterhuis in zijn eerste onderwijs in Amsterdam 'regelmatig' in de fout ging bij zijn behandeling van de Egyptische en Babylonische wiskunde.
'Onder zijn gehoor in Amsterdam bevond zich een student, de jonge wiskundige Evert Bruins, die zich al op het gymnasium het spijkerschrift had eigen gemaakt en Dijksterhuis regelmatig kon betrappen op een vergissing of een fout - die dan terugging op een vergissing van zijn belangrijkste zegslieden, in de eerste plaats de Duitse wiskundige Otto Neugebauer.'
Deze uitspraak is gebaseerd op mededelingen van Bruins zelf, en dit alleen al zou een veel voorzichtiger formulering rechtvaardigen. Dat Bruins het met bijna iedereen oneens was, Neugebauer inderdaad voorop, noopt tot een nog gematigder formulering. De drie promoties bij Dijksterhuis vormen een ander geval waar ik twijfel heb bij het 'overgenomen oordeel'. Van Berkel vindt de proefschriften, van Smeur, Backbier en Busard, niet geweldig. Over het werk van Backbier *Wiskunde in dienst van de natuurwetenschap. Een bijdrage tot de geschiedenis van de mathematische fysica in de XVIIe eeuw*, (1960) is hij, Freudenthal citerend, weinig lovend ('weinig diepgang en soms niet meer dan een opsomming van historische feiten zonder onderling verband'). Dat verbaasde me. Ik heb het proefschrift vaak geraadpleegd, en vind het een goed toegankelijk boek dat waardevolle informatie geeft over de opkomst van de wiskunde in de fysica. Die toegankelijkheid moet bevochten worden. Alleen al het 17e eeuwse gebruik om kwantitatieve relaties met behulp van verhoudingen te noteren, en niet - zoals wij nu doen - met behulp van functies, levert voor de niet-specialist zeer grote problemen op. Backbier heeft dat goed weten te ondervangen. Je kunt er dus anders over denken dan Freudenthal, zoals Freudenthal zelf ook vaak anders tegen de zaken aankeek dan zijn collega's, en dat niet onder stoelen of banken stak. Wat dat betreft had hij wel iets met Bruins gemeen. Kort na de publicatie van de *Mechanisering* in 1950 kwam ook de erkenning voor Dijksterhuis' werk. Hij werd lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (1950), nadat een eerder benoeming in 1948 gestrand was omdat de minister deze niet had willen bekrachtigen. Voor de literaire en essayistische kwaliteiten van de *Mechanisering* kreeg hij in 1952 de P.C. Hooftprijs (met gevoel voor detail geeft Van Berkel niet alleen de datum, 21 mei, maar ook de toevoeging 'de dag waarop het Amsterdam-Rijnkanaal werd geopend'). En in 1953 werd Dijksterhuis buitengewoon hoogleraar in de geschiedenis van de exacte wetenschappen in Utrecht en Leiden. De benoeming markeerde het begin van zijn nadagen. Zijn gezondheid begon hem langzaam in de steek te laten, en een beroerte, die hem op nieuwjaarsdag 1959 trof, maakte dat hij zich uit veel van zijn bezigheden moest terugtrekken. Zijn afscheid als hoogleraar in 1963 ging in stilte voorbij. Op 18 mei 1965 overleed hij. Het bovenstaande is maar de helft van het eigenlijke verhaal, want over Dijksterhuis als wetenschapshistoricus heb ik nog nauwelijks iets gezegd. Dat laat ik ook verder zo, want deze helft is al uitgebreid genoeg, en voor *Euclides* leek me de belangrijkste vraag om welke redenen *Dijksterhuis, Een biografie* voor wiskundigen het lezen waard is. Welnu:
- Voor een wiskundige die in de geschiedenis van het vak geïnteresseerd is, is het een zeer informatief boek. Van Berkel schrijft uitgebreid over belangrijke en minder belangrijke wiskundigen, over het wiskundig bedrijf, en over het wiskundeonderwijs;
- Voor de historicus van de wiskunde die in de ontwikkeling van de wetenschapsgeschiedenis geïnteresseerd is biedt het boek veel wetenswaardigs. De ontwikkeling van de discipline in Nederland, de internationale samenwerking, het ontstaan en de receptie van een aantal belangrijke publicaties, en de houding van de uitgevers en de tijdschriften tegenover wetenschapshistorische publicaties, de gedegen beschouwingen hierover zijn een plezier om te lezen;
- Wat de wiskunde betreft is het vooral belangrijk voor iemand die in de meta-vragen van het vak geïnteresseerd is. Dat betreft bijvoorbeeld de passages over het belang van de wiskunde voor de samenleving, over de kloof tussen alfa's en beta's, over de logische opbouw van de Euclidische meetkunde en over de verhouding tussen wiskunde en natuurkunde.

Het boek is verbluffend in zijn volledigheid en precisie, mooi in sfeertekening, en knap in compositie en comprimering. Volksstammen zullen er niet doorheen kunnen komen, maar de Nederlandse wiskundigen en wetenschapshistorici mogen Van Berkel dankbaar zijn.

Jan van Maanen

3e Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 1997

Jacob Perrenet

Inleiding

Op zaterdag 31 januari 1998 wordt voor de vierde keer de Mathematische Modelleercompetitie Maastricht gehouden. In dit artikel staan de opgaven en beknopte uitwerkingen van de derde Mathematische Modelleercompetitie. In de toekomstige Tweede Fase zouden dergelijke opgaven misschien wel een rol kunnen gaan spelen als praktische opdrachten.
De wedstrijd wordt georganiseerd door de verantwoordelijken voor de opleidingen Kennistechnologie en Econometrie van de Universiteit Maastricht. Gedurende twee-en-een-half uur bogen 100 scholieren zich in teams over vijf opgaven. De deelnemers waren vijfde- en zesdeklassers vwo, afkomstig van 17 scholen uit Nederland en België. Er waren in totaal 24 teams. De begeleidende leerkrachten werden onthaald op een programma met lezingen over onderwerpen uit de Econometrie en de Kennistechnologie, gegeven door docenten van deze beide exacte opleidingen van de UM. De voordrachten behandelden de volgende onderwerpen: toepassingen van de besliskunde, automatisch modelleren, verdelingen en kostenallocaties, evolutie en evenwicht.
In vergelijking met de vorige keer was er vooral een toename van de deelname uit België. Dit ondanks het feit dat het toegepaste karakter van de meeste opgaven voor de Belgische deelnemers een extra moeilijkheid betekent: het Belgisch wiskundeonderwijs is veel meer theoretisch gericht dan het Nederlandse. Beide landen leverden nu eenzelfde aantal teams.
Winnaar werd, evenals het laatste jaar, het Katholiek Gelders Lyceum uit Arnhem, ditmaal met een team bestaande uit Pieter Eendebak (ook vorig jaar bij de winnaars), Muriel Poelman en Pepijn Tiggeloven. De tweede prijs was voor het St. Janscollege uit Hoensbroek.
Hieronder geven we eerst de vijf opgaven en daarna bespreken we globaal de oplossingen die werden geproduceerd.

De opgaven

opgave 1: ordenen
De getallen 1, 2, 3, …, 10 moeten opgeschreven worden, elk in een leeg vakje van de rij.

Figuur 1 Rij voor opgave 1

Eerst moet getal 1 in een willekeurig vakje geschreven worden, dan moet getal 2 in een aangrenzend vakje geschreven worden. Vervolgens moet getal 3 in een vakje grenzend aan één van de bezette vakjes geschreven worden, enzovoorts.
Hoeveel permutaties (d.w.z. ordeningen, volgorden) van de 10 getallen kunnen op deze manier verkregen worden?

opgave 2: schaaktoernooi
Tussen de vijf spelers A,B,C,D en E wordt een schaaktoernooi gespeeld. Iedere speler speelt precies één keer tegen elke andere speler. De einduitslag is A,B,C,D,E waarbij de spelers allen verschillende scores behaald hebben. Na afloop bespreken ze hun ervaringen. Speler B merkt op dat hij de enige speler is die geen enkele keer verloren heeft. Speler E merkt op dat hij de enige speler is die geen enkele keer gewonnen heeft. (Winst levert 1 punt op, verlies 0 punten, en remise 1/2 punt.)
Reconstrueer de volledige uitslagentabel.

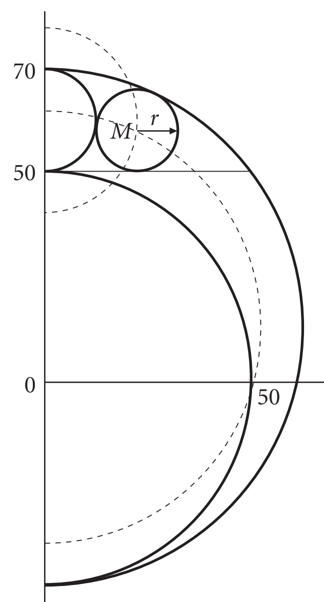
opgave 3: indeling krantenpagina
De voorpagina van universiteitsblad “Observant” moet gevuld worden met artikelen en eventueel foto’s. Deze pagina bestaat uit zes kolommen. Iedere kolom is 100 centimeter lang. De beschikbare artikelen en foto’s hebben een breedte (gemeten in kolommen) en een lengte (gemeten in centimeters). Daarnaast hebben ze ook nog een prioriteit. In de tabel op pagina 101staan deze

waarden voor een aantal artikelen.
Maak nu een keuze uit de genoemde artikelen, zó dat de som van de prioriteiten van de gekozen artikelen zo groot mogelijk is. Laat zien dat alle artikelen en foto's ook werkelijk op de pagina passen door een lay-out te maken. Gebruik hiervoor de bijgevoegde lay-out pagina. Denk daarbij aan het volgende: Een artikel heeft een breedte van één kolom en moet ononderbroken in de gekozen kolom geplaatst worden. Ook de foto's moeten in hun geheel worden geplaatst.

art.	breedte	lengte	prioriteit
1	3	20	60
2	3	25	70
3	3	15	40
4	2	37	75
5	2	37	75
6	2	46	80
7	1	48	55
8	1	48	50
9	1	48	45
10	1	43	45
11	1	37	40
12	1	32	30
13	1	28	30
14	1	28	25
15	1	26	25
16	1	26	25
17	1	26	30
18	1	23	20
19	1	15	15
20	1	15	15

Figuur 2 Tabel bij opgave 3

opgave 4: Alladin's zwaard
De schede van Alladin's zwaard heeft een vorm die begrensd wordt door drie krommen, zoals aangegeven in de figuur hieronder. De krommen AB, AC en BC zijn alle drie halve cirkels die elkaar raken in A, B en C. De halve cirkel door A en C heeft een straal van 60 cm, en de halve cirkel door B en C heeft een straal van 50 cm. De lijn BD, die een zilveren versiering voorstelt, raakt aan beide halve cirkels door B. De cirkel met middelpunt M en straal r stelt een gouden versiering voor, die raakt aan de lijn BD en aan twee halve cirkels. Bepaal de straal r van deze cirkel.
N.B. Een cirkel met straal r en middelpunt (a, b) heeft als vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.



Figuur 3 De schede van Alladin's zwaard (opgave 4)

opgave 5: Van Slag hagelslag
Hagelslagfabrikante Jacqueline Van Slag heeft een goedkope partij op de kop weten te tikken van tienduizend kartonnen vellen van 20 cm bij 32 cm. De kartonnen vellen kan zij gebruiken voor het maken van de pakken waarin de hagelslag verpakt wordt. Om de pakken uit één stuk te kunnen vouwen, snijdt zij rechthoekige stukken uit deze vellen karton weg. Vervolgens plakt zij de gevouwen vellen met een speciaal plakband dicht.

a Geef in een schets weer, hoe je uit de vellen een pak van hoogte h, breedte b en dikte d kunt snijden.
b Wat is de inhoud van een pak, geschreven als functie van de dikte d van het pak?
Veronderstel dat 1 dm^3 hagelslag 600 gram weegt.
c Hoeveel kilogram hagelslag kan Van Slag maximaal in de tienduizend pakken verpakken? N.B. Je mag er vanuit gaan dat de pakken geheel gevuld zijn met hagelslag.
Van Slag houdt wel van wat variatie. Zij wil de hagelslag in een cilindervormige verpakking verkopen.
d Hoeveel kilogram hagelslag kan Van Slag nu maximaal in de kartonnen vellen verpakken?

De uitwerkingen

uitwerking 1: ordenen
Een belangrijk inzicht bij de aanpak van deze opgave is, dat wanneer de 1 ergens geplaatst is, de getallen links en rechts van 1 oplopen en dus met de keuze voor een rij linkergetallen de rij rechtergetallen vast ligt. Met k getallen links van 1 zijn er $9!/k!(9-k)!$ mogelijkheden. Dit levert uiteindelijk een totaal van 2^9 aan mogelijkheden.

20% van de deelnemende teams kwam tot een foutloze oplossing, even zoveel teams wist er totaal geen weg mee. Meestal werd er per waarde van k gerekend en de meeste teams ontdekten daarbij de symmetrie van het probleem: na $k = 0, \ldots, 4$ weet je genoeg. De rekenfouten waren talrijk.

uitwerking 2: schaaktoernooi

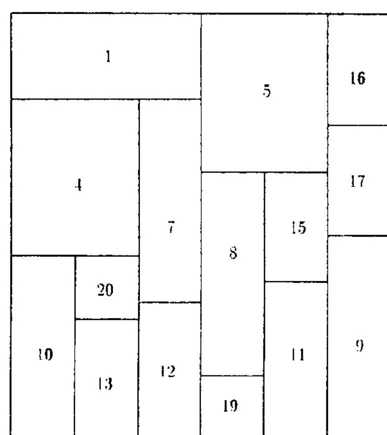
Deze opgave is een kwestie van stapsgewijs logisch redeneren. Dit resulteert in de volgende unieke oplossing.

	A	B	C	D	E
A	-	0	1	1	1
B	1	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
C	0	$\frac{1}{2}$	-	1	$\frac{1}{2}$
D	0	$\frac{1}{2}$	0	-	1
E	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-

Figuur 4 Oplossing schaaktoernooi (opgave 2)

Deze opgave bleek de eenvoudigste. Opnieuw kwam zo'n 20% van de deelnemende teams tot een foutloze oplossing. Maar in tegenstelling tot bij de eerste opgave was ieder wel enigszins op weg gekomen. Bij een aantal goede eindantwoorden miste de uitwerking. Bij de onjuiste antwoorden werd niet aan alle voorwaarden voldaan.

uitwerking 3: indeling krantenpagina

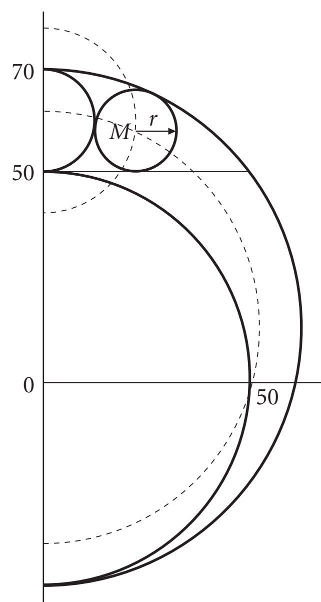


Figuur 5 Een optimale indeling van de pagina (opgave 3)

Toch nog zeven van de 24 teams kwam op het idee de items (artikelen en foto's) te ordenen op belangrijkheid (= prioriteit per oppervlakte eenheid). Dan vallen de items 2, 3, 6, 14, 18 in eerste instantie af. De overgebleven 15 hebben samen een oppervlak van 600 en passen bovendien precies op de pagina (zie figuur 5).
Deze toegepaste opgave bleek voor Nederlandse deelnemers duidelijk eenvoudiger dan voor de Belgische.

uitwerking 4: Aladdin's zwaard

Verreweg de zwaarste opgave; geen wonder, gezien het type. De aanwijzing met de algemene vorm van de cirkelvergelijking bracht geen enkel team veel verder dan het opstellen van een paar specifieke cirkelvergelijkingen. Een uitwerking als hieronder bleek onhaalbaar.



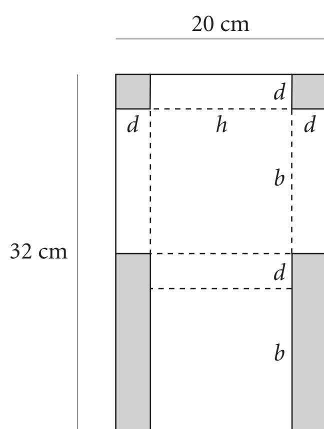
Figuur 6 Alladin's zwaard met hulpcirkels

De kleine en de grote gestippelde cirkel gaan door M.
De bijbehorende vergelijkingen zijn:
$x^2 + (y - 60)^2 = (r + 10)^2$ en
$x^2 + (y - 10)^2 = (60 - r)^2$.
In deze vergelijkingen invullen van $y = 50 + r$ levert na wat rekenwerk de waarde voor r van $8\frac{1}{3}$.

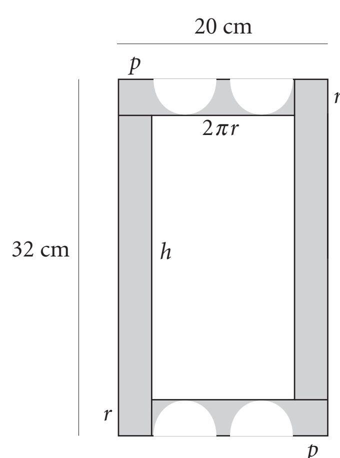
uitwerking 5: Van Slag hagelslag

Ruim de helft maakte het deel met het rechthoekig vouwen zoals bedoeld (zie figuur 7).
Fouten zaten er meer in het opstellen van de formule voor de inhoud - men zag niet precies hoe het papier tot een doos gevouwen werd - dan in het differentiëren van $I(d) = h \times b \times d = (20 - 2d)(16 - d)d = 2d^3 - 52d^2 + 320d$.
De maximale waarde wordt gevonden bij $d = 4$, dus 3456 kg.

De cilindervormige verpakking was moeilijker: niet meer dan een kwart bracht dit deel tot een goed einde. Bij de fouten weer dezelfde soort als bij het rechthoekig deel. Bovendien zagen weinigen dat met aansluitende halve deksels de beste oplossing wordt verkregen. Zie de schets in figuur 8.



Figuur 7 Uitslag rechthoekige verpakking (opgave 5)



Figuur 8 Schets voor cilindervormige verpakking (opgave 5)

Ook deze toegepaste opgave stelde de Belgische deelnemers voor de meeste problemen. Echter, enkele dagen later kwam er wel een brief van Dries Schellekens van het Sint-Jozefcollege te Turnhout met een betere oplossing voor de rechthoekige variant dan de bedenkers hadden bedacht: door het wegsnijden van kleinere stukken (d bij $1/2d$) wordt een optimale dikte bereikt van ongeveer 5,9 cm en dus een maximum van ongeveer 5041 kg.

In de na afloop ingevulde enquêtes bleek de Maastrichtse Modelleer-competitie hoog te scoren op aantrekkelijkheid. Bijna alle vijfdeklassers onder de deelnemers gaven dan ook aan de volgende keer graag opnieuw mee te doen.

40 jaar geleden

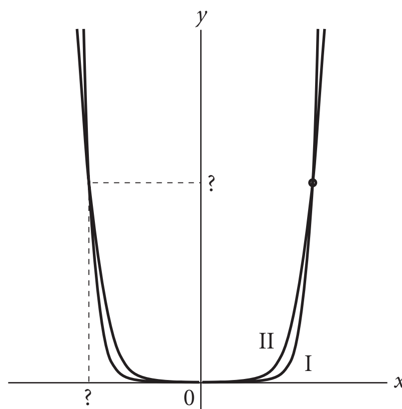
Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde
door Dr. P.M. van Hiele en Dr. D. Van Hiele-Geldof

In hoofdstuk II van “L’enseignement des mathématiques” geeft E.W. Beth zijn visie op doel en betekenis van het wiskundeonderwijs. Zeer belangrijk daarin is zijn uitspraak: “Le rôle de la formation mathématique dans l’enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive.”
Het komt mij voor, dat wij bovengenoemde tese niet klakkeloos mogen aanvaarden. Wat nader bekeken moet worden is niet zozeer de betekenis van de deduktieve metode, als wel de vraag, of de vormende waarde van de wiskunde vrijwel uitsluitend of zelfs maar hoofdzakelijk in die deduktieve metode gezocht moet worden.
De wijze, waarop Beth zijn betoog houdt, kan zelf al als argument gebruikt worden tegen de genoemde stelling. Beth begint namelijk in genoemd hoofdstuk met een aantal postulaten, waarvan de beide eerste een relatie vermelden, die beperkt wordt door de uitdrukking “onder andere”. Hij konkludeert uit deze postulaten, dat men een *vrij* intensieve wisselwerking zal mogen *verwachten* tussen de wiskunde-programma’s der instellingen van het middelbaar en van het hoger onderwijs.
Het feit, dat de premissen geen logische relaties zijn, maakt, dat Beth zich in zijn konklusie voorzichtig uitdrukt. De suggestie, die in de verwachting besloten ligt, wordt niet door de logika gerechtvaardigd, ook al kiest Beth voor zijn redenering de vorm van een syllogisme. Hier nu ligt het gevaar van de door Beth geponeerde tese. Immers de bekendheid met de deduktieve metode mag er niet toe leiden, dat men, door zijn redenering in de *vorm* van syllogismen in te kleden, ten onrechte de indruk wekt, dat de konklusies exact zijn.
Wij hoeven er dus niet aan de twijfelen, dat er een zekere, belangrijke vormende waarde in gelegen is, dat de leerlingen vertrouwd zijn met de deduktieve metode. Deze vertrouwdheid kan hun in tweeërlei opzicht nuttig zijn: ten eerste om zich van deze metode in passende gevallen te kunnen bedienen en ten tweede om anderen halt te kunnen toeroepen, wanneer zij zich ten onrechte van deze metode bedienen.

Uit: Euclides 33 (1957-1958)

Werkblad

Machtsfunctie



1 Hierboven zie je de grafieken getekend van $y = x^{10}$ en $y = 2x^6$.

Welke formule hoort bij grafiek I? Geef duidelijke uitleg!

2 In de tekening zie je een paar vraagtekens staan.

Welke getallen horen er op de plaats van die vraagtekens te staan? Geef je antwoord eerst *exact* en daarna afgerond op *twee decimalen.*

3 Een horizontale lijn op hoogte 40 (dus $y = 40$) snijdt de grafieken in totaal in vier punten, van links naar rechts: *A*, *B*, *C* en *D*.

Benader de afstand tussen *A* en *B* en ook de afstand tussen *B* en *C*. Rond af op *twee decimalen.*

Uit: repetitie vwo 4 Profi-volgschool

Werkblad

Formules uitpluizen

Hieronder zie je de algebra-prijstabel.

Prijslijst

basisbewerkingen +, −, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren 2 punten per keer	
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis
n-de macht nemen	*n* punten per keer

Bekijk het substitutieschema

Substitutieschema

$u = x^2$
$v = (x - 1)$
$v^3 + ux + 1$

Standaardvorm

Hornervorm

1 Laat zien dat de standaardvorm $2x^3 - 4x^2 + 3x$ is.

2 Geef nu de Hornervorm.

3 Is het in dit geval goedkoper om volgens het schema, volgens de standaardvorm of volgens Horner te rekenen?

Uit: test atheneum 4 Profi-volgschool

Recreatie

Opgave 682

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Vanaf december 1956 had Martin Gardner bijna 30 jaar lang een puzzelrubriek in Scientific American. De rubriek 'Mathematical Games' is bij velen bekend. Gelukkig voor de lezers werd de rubriek steeds gebundeld tot prachtige puzzelboeken. Afgelopen zomer verscheen de lang verwachte vijftiende collectie: The Last Recreations (1997, Copernicus, New York, ISBN 0-387-94929-1).

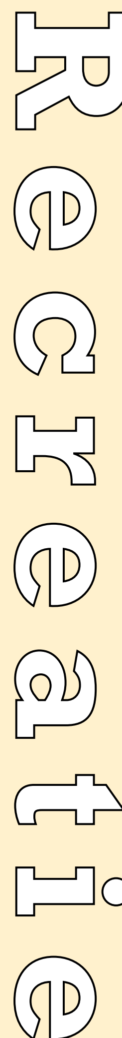
Hieronder volgt een overzichtslijst van de originele Amerikaanse eerste drukken.

The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. *(Simon and Schuster, 1959)*
The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. *(Simon and Schuster, 1961)*
Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American. *(Simon and Schuster, 1966)*
The Numerology of Dr. Matrix. *(Simon and Schuster, 1967)*
The unexpected hanging and other Mathematical Diversions. *(Simon and Schuster, 1969)*
Martin Gardner's Sixth book of Mathematical Games from Scientific American. *(W.H. Freeman, 1971)*
Mathematical Carnival. *(Alfred A. Knopf, 1975)*
Mathematical Magic Show. *(Alfred A. Knopf, 1977)*
Mathematical Circus. *(Alfred A. Knopf, 1979)*
Wheels, life and other Mathematical amusements. *(W.H. Freeman, 1983)*
Knotted doughnuts and other Mathematical Entertainments. *(W.H. Freeman, 1986)*
Time Travel and other Mathematical Bewilderments. *(W.H. Freeman, 1988)*
Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers. *(W.H. Freeman, 1989)*
Fractal Music, Hypercards and More … *(W.H. Freeman, 1992)*
The Last Recreations. *(Copernicus, 1997)*

Als opgave deze maand een staartdeling en een vermenigvuldiging die onafhankelijk van elkaar opgelost moeten worden. De gebruikelijke spelregels gelden: tientallig stelsel, dezelfde letter door hetzelfde cijfer vervangen, enz.

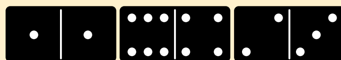
```
• • /G A R D N E R\ M A R T I N          . M A R T I N
      • •                                           . A
        • • •                            ------------- ×
        • • •                           . G A R D N E R
            • •
            • •
            • • •
              • •
              • • •
              • • •
```

Hoe zien de opgaven er in cijfers uit?
Maximaal 5 ladderpunten bij tijdige inzending binnen een maand na verschijning.



Oplossing 679

De dominopuzzel heeft vele puzzelaars in de vakantieperiode bezig gehouden. Als voorbeeld gaf ik de volgende 3 dominostenen



Als we nu naast elkaar liggende velden bij elkaar optellen, dan kunnen we ONAFGEBROKEN doortellen tot en met 17.

	1		1		6		4		2		3
Som 2 buren:		2		7		10		6		5	
Som 3 buren:			8		11		12		9		
Som 4 buren:				12		13		15			
Som 5 buren:					14		16				
Som 6 buren:						17					

U ziet nu gemakkelijk dat alle 'sommen' 1 t/m 17 voorkomen.

Harm Bakker (20 punten), Marum vond de volgende resutaten:

Max. 3 bij:	1 2
Max. 9 bij:	1 1 4 3 of 3 1 5 2 of 1 3 3 2 of 4 1 2 6
Max. 17 bij:	1 1 1 5 5 4 of 1 1 4 4 4 3 of 1 1 6 4 3 2 of 1 1 6 4 2 3 of 1 3 6 2 3 2 of 3 2 1 6 4 4
Max.29 bij:	1 3 6 6 6 2 3 2
Max. 39 bij:	1 1 1 5 6 6 6 4 5 4 of 3 1 4 6 6 6 6 2 5 2 of 1 3 6 6 4 6 6 2 3 2 of 5 1 2 6 6 6 6 4 3 4
Max. 50 bij:	1 1 1 5 6 6 5 6 6 4 5 4 of 3 1 4 6 6 6 5 6 6 2 5 2
Max. 60 bij:	1 1 1 5 6 6 5 5 5 6 6 4 5 4
Max. 69 bij:	1 1 1 5 6 5 5 5 6 6 3 6 6 4 5 4 of 1 1 1 5 6 6 3 6 5 5 5 6 6 4 5 4 of 1 1 1 5 6 6 6 3 5 5 5 6 6 4 5 4 of 1 1 1 6 3 6 6 6 6 4 6 5 5 5 4 4 of 1 3 6 4 6 6 3 6 5 6 5 5 6 2 3 2
Max. 78 bij:	1 1 1 6 3 6 4 5 6 5 6 6 5 5 6 4 4 4
Max. 86 bij:	1 1 1 6 3 5 3 6 4 5 4 6 6 6 6 5 5 5 4 4

Opgemerkt moet nog worden dat het vanaf 7 stenen voorlopige resultaten zijn !

Vele lezers gaven leuke varianten aan:

- Met 0 beginnen, want een dominospel begint toch ook met dubbel blank! (*Monica Woldinga*, (28 ptn), Amstelveen).
- Gebruik twee dominospellen. (*Riet Roos-Rietdijk*, (49 ptn), Alphen a/d Rijn).
- Hoogste steen is niet dubbel 6, maar dubbel m. (*Ton Kool* (49 ptn), Soest gaf oplossingen met 5 stenen voor $3 \leq m \leq 8$).

Tot en met 4 dominostenen vond *Pieter Torbijn* (15 punten), Den Haag nog enkele literatuurbronnen:

1 H.E. Dudeney - 536 Puzzles & Curious Problems, 1967, problem 481.
2 Elseviers Ladderpuzzel 655 van 7 oktober 1967.
3 Journal of Recreational Mathematics, vol. 4, nummer 2, april 1971.

Met 61 punten is winnaar van een boekenbon van *ƒ* 25,–:

Rolf Nihom
Stevinstraat 241
2587 EH Den Haag

Hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
4	15-01-98	20-11-97
5	19-02-98	08-01-98
6	19-03-98	05-02-98
7	01-05-98	19-03-98
8	18-06-98	07-05-98

Wintersymposium
za. 3 januari 1998
'Sociale keuzetheorie'
Wiskundig Genootschap
Aankondiging p. 93

Masterclass Analyse RU Leiden
'Van afbeeldingen naar fractals.'
do. 22 / vr. 23 januari 1998
Voor 4, 5 en 6 vwo en docenten.
Mathematisch Instituut, RU leiden
hfinkeln@wi.leidenuniv.nl
Zie ook laatste kolom.

Mathematische Modelleercompetitie
za. 31 januari 1998
Voor 4, 5 en 6 vwo
Maastricht

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 30 januari/za. 31 januari 1998
Freudenthal instituut:
030 - 2611 611
Zie aankondiging Euclides 72-8

Wat en Waar is Wiskunde II
Maandagochtend 9.30 TV
9/2, 16/2, 2/3, 9/3
Herhaling WWW II: donderdag 12/3
Herhaling WWW I : donderdag 26/3
Zie aankondiging volgende nummer

VMBO: leerwegen in uitvoering
donderdag 19 februari 1998
Algemene conferentie
Mesoconsult:
013 - 4560311

Wiskunde Olympiade Voorronde
Vrijdag 3 april 1998
Fred Bosman
026 - 3521294
Fred.Bosman@cito.nl

Kangoeroe
Vrijdag 20 maart
Jan Donkers
040 - 2472738

jand@win.tue.nl

Methodekeuze-bijeenkomsten
wo. 4 februari 1998
do. 5 februari 1998
wo. 11 februari 1998
do. 12 februari 1998
wo. 18 februari 1998
do. 19 februari 1998

Examendata vbo B:
do. 14 mei 1998
vbo/mavo C/D:
di. 19 mei 1998
havo wiskunde A:
vr. 15 mei 1998
havo wiskunde B:
wo. 27 mei 1997
vwo wiskunde A:
di. 19 mei 1998
vwo wiskunde B:
vr. 15 mei 1998

Internetsites voor wiskundedocenten:

Nationale Wiskunde Dagen:
www.fi.ruu.nl/nwd

Masterclass Analyse RU Leiden
www.wi.leidenuniv.nl/math/master

Van aardbeving tot zonnewijzer
Ideeën voor praktische opdrachten
www.ruu.nl/beta/handl/page2.html

Mathesis
Virtuele wiskunde-onderwijsomgeving
www.textinfo.nl/mathesis

Amerikaanse Vereniging van wiskundeleraren
www.nctm.org

Whizzkids
www.win.tue/NWO/whizzkids

Suggesties graag e-mailen naar cph@xs4all.nl

Advertentie TI-83

Texas Instruments

Ten Brink!

Deze advertentie uit

Euclides 73/2 hergebruiken.

Herziene kerndoelen basisvorming, Tweede Fase havo/vwo, Leerwegen vmbo

Wolters-Noordhoff nodigt u uit

U bent van harte welkom op een of meer van de volgende bijeenkomsten. U kunt daar uitgebreid kennismaken met de herziene delen voor de basisvorming en de nieuwe delen voor de Tweede Fase van

Moderne wiskunde zevende editie
en
Netwerk tweede editie

Gebruikersbijeenkomsten
Eind januari 1998 organiseren wij exclusieve bijeenkomsten voor de gebruikers van onze methoden. U gebruikt *Moderne wiskunde, Netwerk* of *WiskundeLijn* en u hebt geen aanmeldings-kaart ontvangen? Meldt u zich dan telefonisch aan bij Wolters-Noordhoff:
(050) 522 63 11.

– maandag 26 januari 1998	Moderne wiskunde
– dinsdag 27 januari 1998	Netwerk
– donderdag 29 januari 1998	WiskundeLijn

Nationale Wiskunde Dagen
Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen zijn wij met de nieuwe edities aanwezig op de informatie-markt. Ook nodigen wij u van harte uit deel te nemen aan onze workshop op vrijdagavond, van 21.30 tot 22.30 uur.

U kunt zich nog aanmelden voor de NWD bij het Freudenthal Instituut, telefoon (030) 253 86 11, fax (030) 253 53 53.

– vrijdag 30 en zaterdag 31 januari 1998
  te Noordwijkerhout.

Methodekeuzebijeenkomsten
De LPC's organiseren in samenwerking met de uitgevers door het gehele land Methodekeuze-bijeenkomsten.
U kunt zich daar laten informeren over alle nieuwe en herziene methodes.

– woensdag 4 en donderdag 5 februari 1998
– woensdag 11 en donderdag 12 februari 1998
– woensdag 18 en donderdag 19 februari 1998

Voor inhoudelijke informatie en inschrijf-formulieren kunt u terecht bij Roel Gordijn (LPC), tel. (033) 453 43 53 of Freke Bosscha, tel. (020) 430 91 63.

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

419/7335